

## ■ Mathematica - Laboration 6 vt -99. Differentialekvationer

**Förberedelser:** Läs kapitel 26 i manualen. Denna inläsning bör göras vid dator!

**Tips:** Undvik decimaltal då du löser differentialekvationer. *Mathematica* har en liten bug i sammanhanget, som gör att lösningarna visserligen är korrekta, men ser ganska trista ut.

**Uppgift 1** Betrakta differentialekvationen  $y'' + 2y' + 4y = 6x$

a) Bestäm den allmänna lösningen

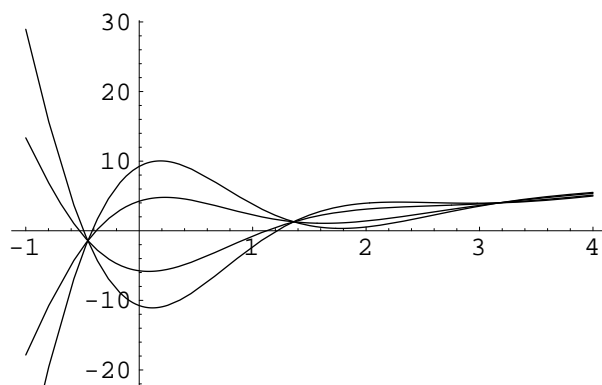
b) Låt integrationskonstanterna vara A och B.

Rita i samma kordinatsystem lösningskurvorna för  $-1 \leq x \leq 4$  då  $\{A,B\} = \{-10,10\}$ ,  $\{-5,5\}$ ,  $\{5,-5\}$  respektive  $\{10,-10\}$ .

c) Lösningsskurvorna har en gemensam asymptot. Bestäm denna.

Svar: a)  $y = -\frac{3}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{4} e^{-x} \cos[\sqrt{3} x] - \frac{1}{4} \sqrt{3} e^{-x} \sin[\sqrt{3} x]$

b) Lösningsskurvorna



c) Asymptoten är  $y = -\frac{3}{4} + \frac{3x}{2}$

**Uppgift 2** Antalet individer i en population bananflugor minskar till följd av en virussjukdom med en hastighet som är proportionell mot kvadraten på antalet ännu levande flugor. På 10 timmar minskar antalet flugor från 1000 till 800. Beräkna antalet levande bananflugor efter ett dygn.

Svar: Efter ett dygn finns det 625 bananflugor



### Några formler från elläran

Spänningen över en resistor är  $u_R = Ri = \frac{dq}{dt}$

Spänningen över en kondensator är  $u_C = \frac{q}{C}$

Spänningen över en spole är  $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2 q}{dt^2}$

Med hjälp av Kirchhoffs lagar kan sedan ställa upp differentialekvationer för godtyckliga kretsar.



**Uppgift 3** I en RCL-seriekrets är  $R = 4 \Omega$ ,  $C = 20 \text{ mF}$ ,  $L = 2 \text{ H}$ . Emk = 30 V

a) Bestäm strömmen som funktion av tiden

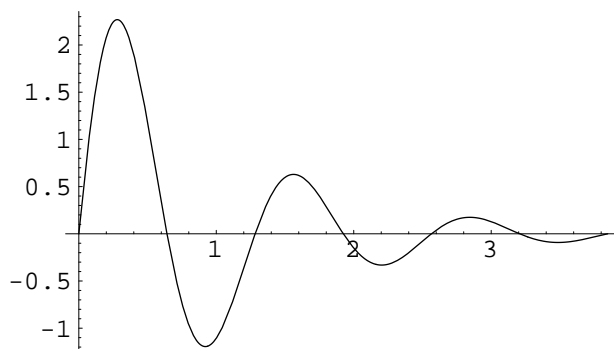
b) Beräkna strömmens period, T.

c) Rita strömkurvans graf för  $0 \leq t \leq 3T$

Svar: a) Strömmen är  $i(t) = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-t} \sin[2\sqrt{6} t] \text{ A}$

b) Perioden är  $T = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \text{ s}$

c) Strömkurvan



**Uppgift 4** Till en likspänningskälla med den konstanta polspänningen 120 V kopplas i serie en resistor med resistansen  $12 \text{ k}\Omega$  och en kondensator med kapacitansen  $0,10 \text{ mF}$ . Parallellt med kondensatorn kopplas en glimlampa med tändspänningen 90 V,

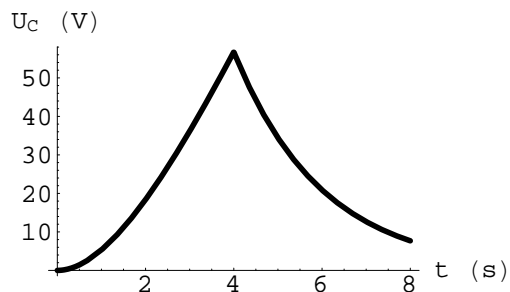
vilket innebär att då kondensatorn uppladdats till 90 V, tänder lampan, varvid kondensatorn omedelbart urladdas. Härvid slocknar lampan och uppladdningen av kondensatorn startar på nytt.

- a) Hur många gånger per minut blinkar lampan?  
b) Vilken är strömstyrkan ögonblicket innan lampan tänder?

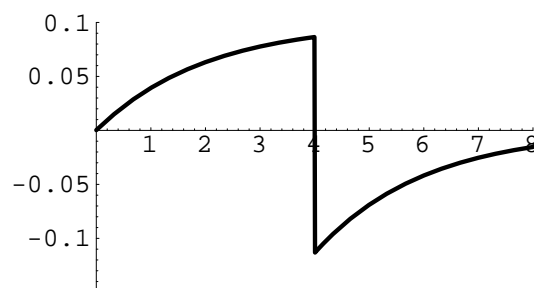
Svar: a) Antalet blinkningar per minut är 36  
b) Strömstyrkan då lampan tänder är 2.5 mA

- Uppgift 5** I en RC-seriekrets är  $R = 500 \, \Omega$ ,  $C = 4 \, \text{mF}$  och emk  $= h(t)$  enligt nedanstående figur. Rita grafer som visar  
a) Spänningen över kondensatorn som funktion av tiden för  $0 \leq t \leq 8 \, \text{s}$ .  
b) Strömmen i kretsen som funktion av tiden för  $0 \leq t \leq 8 \, \text{s}$ .

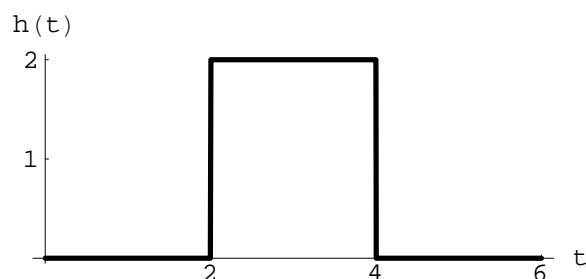
Svar: a) Spänningen över kondensatorn



b) Strömmen i kretsen



- Uppgift 6** Vilka värden antar  $y = f(t)$  på intervallet  $[0, 7]$  då  $y$  är lösning till differentialekvationen  $y'' + y' + 3y = h(t)$ , där  $h(t)$  visas i nedanstående figur.



Svar:  $-0.419609 \leq y \leq 1.08393$

*Uppgift 7*      Utslagsvinkeln,  $\phi$ , för en plan matematisk pendel ges av differentialekvationen  $\phi'' + \frac{g}{l} \sin[\phi] = 0$ , där  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  och  $l$  är pendeln längd.

a) Beräkna pendelns svängningstid då pendelns längd är  $5,00 \text{ m}$  och amplituden är  $45^\circ$ .

b) Vilken är pendelkulans största hastighet?

Svar: a) Svängningstiden är  $4.67 \text{ s}$

b) Maxhastigheten är  $5.36 \text{ m/s}$

*Uppgift 8*      En vattencistern har formen av en cylinder med höjden  $5,00 \text{ m}$  och radien  $0,50 \text{ m}$ . Den fyllda cisternen kan på 30 minuter tömmas genom en avtappningskran i botten. Vid ett tillfälle upptäcker man att vattennivån i cisternen är  $1,00 \text{ m}$ . Man vill då fylla på cisternen via en kran, som ger  $200 \text{ l/min}$ . Olyckligtvis märker man inte att avtappningskranen står öppen. Beskriv det fortsatta händelseförloppet. Enligt Torricellis lag minskar volymen med en hastighet, som är proportionell mot kvadratroten ut vattenytans höjd över hålet (= avtappningskranen).

Svar: Vattennivån stabiliseras då nivån är  $2.92 \text{ meter}$

*Uppgift 9*      Koncentrationen av föroreningar i en sjö uppgår vid en tidpunkt till  $100 \text{ ppm}$  (parts per million). Genom att de förorenande industrierna ålägges att bygga reningsanläggningar, reduceras koncentrationen föroreningar i sjöns tillflöden till  $10 \text{ ppm}$ . Hur lång tid dröjer det innan koncentrationen i sjön sjunkit till  $20 \text{ ppm}$ ? Sjöns area är  $3 \text{ km}^2$  och dess medeldjup är  $8 \text{ m}$ . Vattenomsättningen i sjön uppgår till  $7 \text{ millioner } m^3 \text{ per år}$  (dvs. tillflöden och utflöden är båda  $7 \text{ millioner } m^3 \text{ per år}$ ). Det får antas att utflödet har samma koncentration av föroreningar som sjön i övrigt.

Svar:  $7,5 \text{ år}$