

■ Mathematica - Laboration 5 vt -99. Integraler

Förberedelser: Läs kapitlen 24 - 25 i manualen. Denna inläsning bör göras vid dator!

Uppgift 1 Beräkna arean av det område som begränsas av $y = x + x \sin(x)$ och $y = x$ på intervallet $[0 \leq x \leq 3\pi]$

Svar: Arean är 9π a.e.

Uppgift 2 Laddningsströmmen för en kondensator i en RC-krets är

$$i(t) = 0,20 e^{-0,1t} \text{ mA.}$$

Kondensatorn är oladdad då $t=0$. Kapacitansen är $100 \mu F$.

a) Hur stor är spänningen över kondensatorn då $t=2,0$ s ?

b) Vilken spänning har spänningskällan?

Svar: a) 3.6 V b) 20 V

Uppgift 3 Beräkna arean av det område som begränsas av de båda cirkelarna $(x+1)^2 + y^2 = 16$ och $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$

Svar: 20.1 a.e.

Uppgift 4 Befolkningsökningen i ett land antas beskrivas av formeln

$$0.82 e^{0.025t} \text{ miljoner / år.}$$

Hur stor är folkmängden år 2010 om den var 32,8 miljoner år 1990?

Svar: 54.1 miljoner

Uppgift 5 Kurvan $(x^2 - y)^2 = 4 - x^2$ innesluter ett område i xy-planet.

a) Beräkna områdets omkrets.

b) Beräkna arean av området.

c) Beräkna volymen av den kropp, som genereras då området roterar kring y-axeln.

Svar: a) 19.7955 l.e. b) 4π a.e. c) $\frac{32\pi}{3}$ v.e.

Uppgift 6 Accelerationen hos en raket är

$$a(t) = k (1 - (t - 20) e^{-0.2t}), \quad 0 \leq t \leq 20 \quad [\text{SI-Enheter}].$$

Efter 20 s har bränslet brunnit slut. 10 s efter starten uppgår raketens hastighet till 1000 km / h.

a) Vilken är raketens maxhastighet?

b) Hur högt har raketen nått just då bränslet tar slut?

Svar: a) 1170 km/h b) 4.9 km

Uppgift 7 Det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y^2 - 7y + 15 - 2x = 0$ och $x^2 + y^2 - 4y - 8 = 0$ får rotera kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

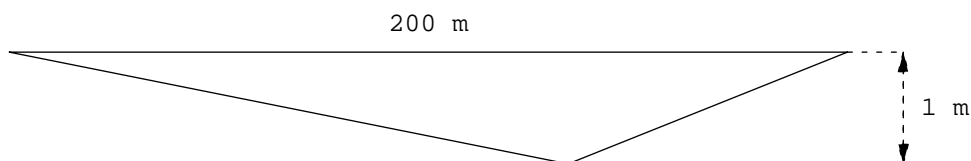
Svar: Volym är 78.46 v.e.

Uppgift 8 En orienterare ska ta sig över en 200 meter bred flod. Vattendjupet i floden är på det djupaste stället 1m. (Se nedanstående - icke skalriktiga - figur). Det djupaste stället ligger 120 m från den närmaste stranden. Den fart han kan hålla beror av vattendjupet. På land är farten 12 km/h och avtar sedan proportionellt mot vattendjupet, så att farten minskat till 2 km/h då vattendjupet är 1 meter.

a) Hur lång tid behöver han för att ta sig över floden?

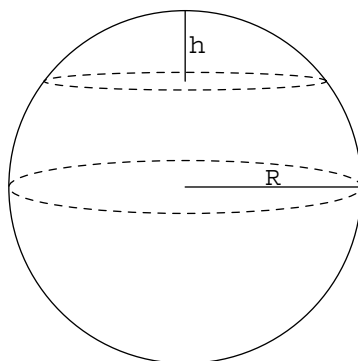
b) *Extrauppgift.* Den tid han behöver för att ta sig över floden är i själva verket oberoende av var floden har sitt största djup. Visa detta.

Ledning: Med farten v tillryggalägges den infinitesimala sträckan ds på tiden $dt = \frac{ds}{v}$



Svar: 129 s

Uppgift 9 Från en sfär med radien R skär man av en sfärisk kalott med höjden h . Beräkna kalottens volym.



Svar: $\frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$