

■ Mathematica - Laboration 4 vt -99. Gränsvärden och kontinuitet. Derivator

Förberedelser: Läs kapitlen 20 - 23 i manualen. Denna inläsning bör göras vid dator!

Uppgift 1 Betrakta funktionen $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x - 10}$

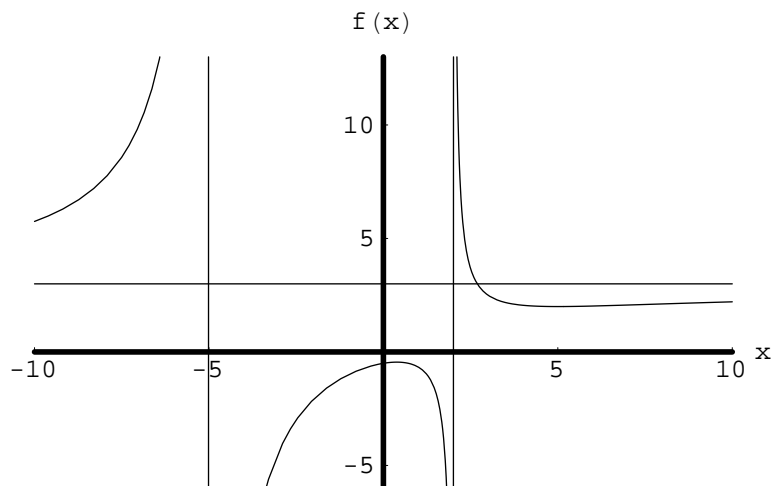
- Undersök $f(x)$ med avseende på eventuella lokala max- och minpunkter
- Undersök $f(x)$ med avseende på eventuella horisontella och vertikala asymptoter.
- Rita funktionens graf tillsammans med dess asymptoter

Svar: a) Lokalt maximum i $\left\{ \frac{5}{13}, -\frac{22}{49} \right\}$

Lokalt minimum i $\{5, 2\}$

b) Horisontell asymptot: $y = 3$

Vertikala asymptoter: $x = -5$ och $x = 2$



Uppgift 2 Kurvan $y = f(x)$ säges ha en asymptot $y = kx + m$ om $f(x) - (kx + m) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.

Detta innebär att funktionens graf ligger mycket nära en rät linje för stora värden på x .

Om kurvan har en sådan asymptot, kan den beräknas på följande sätt.

Först beräknas $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ och därefter $m = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Om något av dessa gränsvärden saknas, har funktionen inte någon asymptot då $x \rightarrow \infty$.

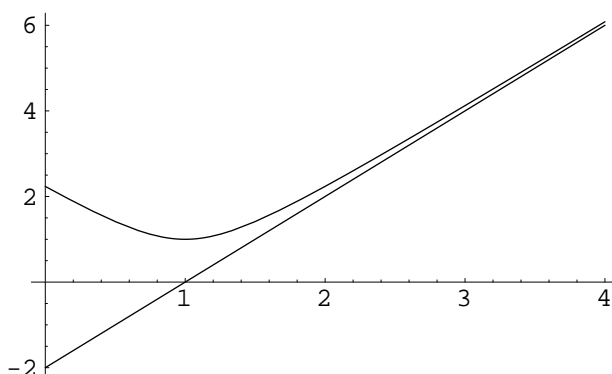
Om $k = 0$ är asymptoten horisontell. Om $k \neq 0$ säges asymptoten vara sned.

Undersök om $f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x + 5}$ har någon asymptot.

Bestäm i så fall asymptotens ekvation.

Rita då också en figur som visar såväl $f(x)$ som asymptoten.

Svar: Asymptotens ekvation är $y = -2 + 2x$



Uppgift 3 Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen

$$f[x] = \sqrt{-9 - 12x + 48x^2 + 4x^3 - 15x^4} + \text{ArcSin}\left[\frac{1}{3}(-1 + 2x)\right]$$

$$\text{Svar: } D_f = \left\{x: -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \mid \mid \frac{3}{5} \leq x \leq \sqrt{3}\right\}$$

$$V_f = \{y: -0.589031 \leq y \leq 5.3247\}$$

Uppgift 4 En snigel befinner sig i origo i ett koordinatsystem. I första kvadranten går det en väg vars ekvation är $y = \frac{400}{x+1}$ (mått i meter). Snigelns hastighet är 10 m/h.

Vilken är den kortaste tid snigeln behöver för att krypa fram till vägen?

Svara i minuter.

Svar: Tiden är 165. min]

Uppgift 5 I den punkt i första kvadranten där linjen $y = x$ skär kurvan $3x^3 + 2y^3 = 10xy$ dras en tangent. Bestäm tangentens ekvation.

$$\text{Svar: } y = 10 - 4x$$

Uppgift 6 Kurvan $270 + 216x + 216x^2 + 96x^3 + 16x^4 - 240y + 72y^2 = 0$ innesluter ett område i xy-planet. Vilken är den längsta sträcka (parallell med x-axeln), som får plats inuti området? Exakt svar erfordras.

$$\text{Svar: } 11^{1/4} \text{ l.e.}$$

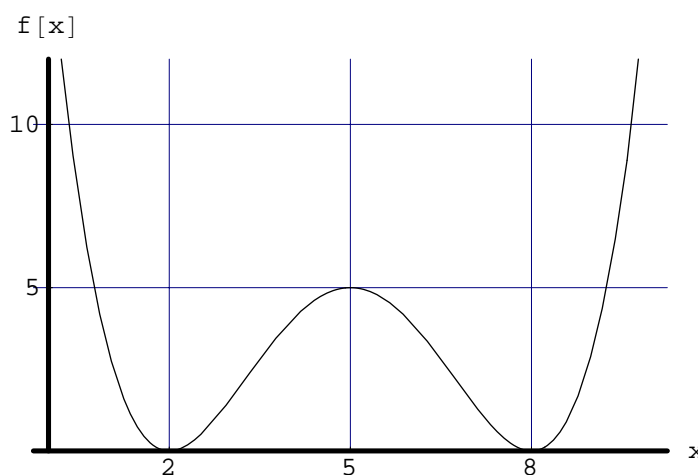
Uppgift 7 På den horisontella marken står två torn på 200 meters avstånd. Tornen är 70 m respektive 110 m höga. Mellan tornen går en rak stig. Från vilken punkt på stigen är den sammanlagda synvinkeln till tornen som minst? Hur stor är denna minsta synvinkel? Svara i hela grader.

Svar: 97 m från det lägre tornet. Synvinkeln är 83°

Uppgift 8 Beräkna volymen av den största cylinder, som kan skrivas in i en kon med radien R och höjden H. Hur stor del av konen upptas av denna cylinder?

Svar: Volymen är $\frac{4}{27} H \pi R^2$ v.e., vilket utgör $\frac{4}{9}$ av konen.

Uppgift 9 Bestäm ett polynom $p(x)$ av lägsta möjliga gradtal, vars graf överensstämmer med nedanstående figur.



Svar: $p(x) = \frac{1280}{81} - \frac{1600x}{81} + \frac{220x^2}{27} - \frac{100x^3}{81} + \frac{5x^4}{81}$

Uppgift 10 Ett kärl har formen av ett halvklot med radien 50,0 cm. Kärlet fylls på med vatten från en kran, som ger 15 liter / min. Hur fort stiger vattenytan i kärlet då vattendjupet är 30,0 cm?

Svar: Stighastigheten är $\frac{50}{7\pi} \approx 2.27$ cm/min