TENTAMEN FÖR GRUNDSSKOLLÄRARLINJEN I MATEMATIK MAL 20 1995-01-18 kl 14.15-19.15

Inga hjälpmedel(ej heller räknedosa)
Skriv namn, födelsenummer och ange även namnen på de övriga medlemmarna i fyragruppen.

Skriv tydliga och utförliga motiveringar till dina svar och lösningar. Försök att beskriva så utförligt du kan hur du tänker. Börja med att titta igenom skrivningen i sin helhet lös därefter uppgifterna i den ordning som du själv finner lämplig.

1. A. Låt K vara en kropp med elementen a, b och c alla skilda från 0 .
Skriv på ett gemensamt bråkstreck

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

B Visa med hjälp av enbart kroppsaxiomen att den formel du svarat med i uppgift A är korrekt. Använd bara ett axiom i taget och ange också vilket axiom du använder i varje led genom att ange bokstavsbeteckningen ((a) till (k)).

FÖR KROPPSAXIOMEN SE APPENDIX A .

2. A. Betrakta en rektangel i planet som inte är en kvadrat. Beskriv symmetrigruppen till denna rektangel. Skriv ut grupptabellen. (operationstabellen)
B. Skriv upp grupptabellen för av alla rester vid division med 4 under addition modulo 4 , dvs gruppen $(\mathbb{Z}_4, +)$
C. Definiera vad som menas med att två grupper är isomorfa.
D. Avgör om de två grupperna i uppgifterna A resp. B är isomorfa.

3. I en godtycklig ring med etta (dvs med multiplikativt enhetselement vanligtvis betecknat med symbolen 1) kan man alltid multiplicera ett element x med sig själv. Man får $x \cdot x$ som betecknas x^2 . Det är då meningsfullt att betrakta ekvationen

$$x^2 = 1$$

Vi ~~nu~~ skall undersöka frågan om hur många rötter denna ekvation har. Ringen betecknas med R.

A. Besvara först frågan i de fall vi är mest vana vid nämligen då R = de reella talen ofta betecknade med $\mathbb{R}$. Hur många rötter har ekvationen då? Ge en förklaring till ditt svar. Ange rötterna.

B. Lös ekvationen i $R = \mathbb{Z}_{24}$ (dvs i ringen av restklasser modulo 24 där addition och multiplikation sker genom räkning modulo 24).

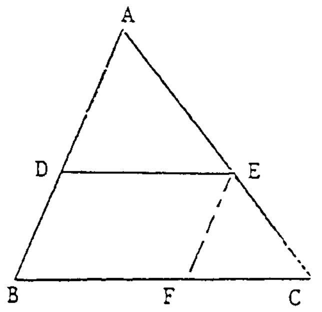
C. Jämför resultatet i uppgift A och B. Kan du ge någon förklaring till de skillnader som du ser? Finns det någon egenskap som skiljer de båda fallen åt ?

D. Formulera ett allmänt påstående om ekvationen $x^2 = 1$ som gäller i varje kropp K . Bevisa ditt påstående utgående från enbart kroppsaxiomen på samma sätt som i uppgift 1

E. Titta på appendix ~~A~~ B om andragradsekvationer ur Kvist-Larsson : Lärobok Matematik för grundskolan - Nya Lundasystemet. I texten påstås att en andragradsekvation har två lösningar. Är det sant? Alltid? När? I vilka situationer? Det står också: det finns ett positivt och ett negativt tal vars kvadrat är 36. Beskriv under vilka omständigheter detta gäller och ge en förklaring till varför det skulle vara sant.

4. A: Definiera begreppen kongruens och likformighet mellan trianglar.
B. Betrakta följande sats och dess bevis.

SATS 11. (Topptriangelsatsen). Om en med en sida i en triangel parallell linje avskär en topptriangel, så är denna likformig med hela triangeln.



Bevis. Givet Δ ABC och DE parallell med BC . Drag EF parallell med AB . I Δ ADE och Δ ABC är

$\wedge$ A gemensam

B1 $\wedge ADE \overset{?}{\cong} \wedge B$

$\wedge AED \cong \wedge C$

$|BF| \underset{?}{=} |DE|$ enl. övn. 2. Alltså gäller

B2

enl. sats 10:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BF|}{|FC|} \quad (*)$$

Härav följer att ? B3

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|BC|} \quad (**)$$

$\therefore$ Δ ADE $\sim$ Δ ABC enligt definitionen. $\square$

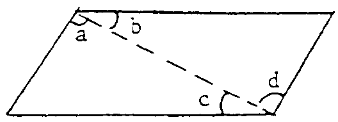
I beviset finns tre frågetecken utsatta. Förklara dessa led i beviset.

B1 Vid det första frågetecknet påstås två vinklar vara lika. Förklara varför dessa vinklar är lika. Formulera den sats som används. Rita figur.

B2 Vid det andra frågetecknet hänvisas till övn2. Bevisa att påståendet i denna övning är sant.

Övn. 2. Visa att motstående sidor i en parallellogram är lika stora.

Ledning:



visa först att $a \cong d$ och $c \cong b$.

B3 Förklara i detalj resonemanget vid frågetecken tre. Dvs förklara hur påståendet (**) följer ur påståendet (*)

C Formulera parallellaxiomet.

D Analysera resonemanget i beviset för topptriangelsatsen och avgör om detta är beroende av parallellaxiomet eller ej. (Beskriv på vilket sätt och var beroendet framträder eller på vilket sätt du kan konstatera oberoendet.)

FORTS) E. Titta på appendix ~~B~~ C. Där ges en framställning av likformighetsteori ur samma lärobok som i appendix ~~A~~. B Jämför framställningen med den som du just diskuterat iovanstående deluppgifter.

F. Lös följande uppgifter i samma läromedel (se appendix ~~B~~ C) 578,589 och 801. (589 är något ofullständigt formulerad sträckan OD behövs)

5 På sidan 72 i KVALITETER I ELEVERS TÄNKANDE kan man läsa:

Intentionsdjupet i eleverna förståelse

Vi kan konstatera att eleverna når ett avsevärt djup i sin förståelse av problemet som de löser. De lyckas också, på olika sätt, hantera osäkerheten i lösningen. Även om Ida och Maria inte når en insiktsfull resignation så lyckas de behålla sin undran och formulera sitt problem på ett tydligare sätt vid slutet av arbetet än i dess inledning.

I citatet finns tre påståenden:

(1) Eleverna når ett avsevärt djup i sin förståelse av problemet.
(2) Eleverna lyckas hantera osäkerheten i lösningen.
(3) Eleverna formulerar sitt problem tydligare vid slutet av arbetet.

Välj ett av dessa påståenden.Visa hur det som påstås kommer till uttryck hos eleverna genom att välja något exempel från kapitel 3.

6 P PÅ VARJE UPPGIFT. $\Rightarrow$ MAXPOÄNG 30

GODKÄNT $\geq$ 12P

Lycka till!

Mats

APPENDIX A

RING & KROPPSAXIOM.

Addition:

(a) $\forall_{a,b \in R}$ $\quad a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$ (slutenhet)
(b) $\forall_{a,b,c \in R}$ $\quad (a+b)+c = a+(b+c)$ (associativitet)
(c) $\forall_{a,b \in R}$ $\quad a + b = b + a$ (kommutativitet)
(d) $\exists_{0 \in R} \forall_{a \in R}$ $\quad 0 + a = a$ (neutralt element 0)
(e) $\forall_{a \in R} \exists_{a' \in R}$ $\quad a + a' = 0$ (motsatt element)
a' betecknas med $-a$.

Multiplikation:

(f) $\forall_{a,b \in R}$ $\quad a, b \in R \Rightarrow ab \in R$ (slutenhet)
(g) $\forall_{a,b,c \in R}$ $\quad (ab)c = a(bc)$ (associativitet)
(h) $\forall_{a,b \in R}$ $\quad ab = ba$ (kommutativitet)
(i) $\exists_{1 \in R} \forall_{a \in R}$ $\quad 1a = a$ (neutralt element 1)
(j) $\forall_{a \in R} \exists_{a' \in R}$ $\quad aa' = 1$ (inverst element)
a' betecknas med a^{-1}. OBS $a \neq 0$ OBS!

Addition och multiplikation:

(k) $\forall_{a,b,c \in R}$ $\quad a(b+c) = ab + ac$ (distributivitet) [4]

OBS! Använd beteckningarna (a) – (k) när du löser uppgifterna.
VIKTIGT.

APPENDIX B

5 Andragradsekvationer Pythagoras' sats

Andragradsekvationer

Ekvationen $x^2 = 36$ kallas en *andragradsekvation* eftersom variabeln ha exponenten 2. En andragradsekvation har två lösningar.

Sedan förut vet du att du får göra vilken operation som helst i en ekvation förutsatt att du gör samma sak i båda leden (ej multiplikation och division med 0). Då du löser andragradsekvationer ska du ta kvadratroten ur båda leden.

Ex 1 Lös ekvationen $x^2 = 36$

$x^2 = 36$

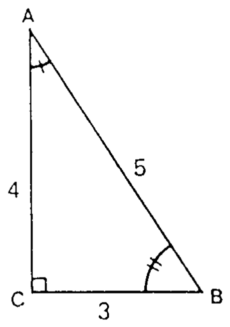
Med ord kan vi beskriva ekvationen som: "Vilke tal i kvadrat är lika med 36?"
Du vet att det finns ett positivt och ett negativt tal vars kvadrat är 36. Dessa båda tal betecknar vi med $+\sqrt{36}$ och $-\sqrt{36}$
Obs! Vi har skrivit dessa båda tal på samma gång.

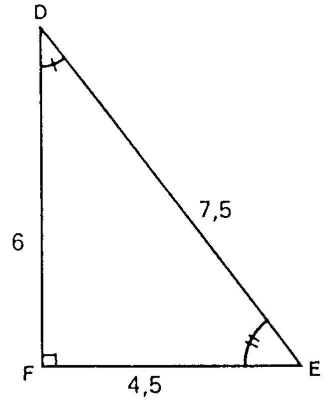
$x = \pm\sqrt{36}$
$x = -\sqrt{36}$ eller $x = \sqrt{36}$
$x = -6$ eller $x = 6$
Svar: $x = -6$ eller $x = 6$

APPENDIX C

Likformighet

(cm)





Triangeln DEF är en avbildning av triangeln ABC.

Bildar vi kvoten $\frac{AB}{DE}$ får vi $\frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$ dvs skalan är 2 : 3

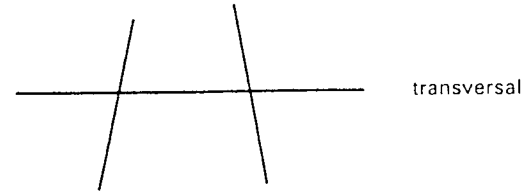
Samma kvot får vi om vi räknar ut $\frac{AC}{DF}$ och $\frac{BC}{EF}$

I de båda trianglarna är motsvarande vinklar lika stora. Detta har vi i figurerna markerat genom samma "tecken" på lika stora vinklar.
Då kvoten av avstånden mellan två punkter i en figur och motsvarande punkter i figurens avbildning är konstant (alltid densamma) säger man att figurerna är *likformiga*.
I likformiga figurer är motsvarande vinklar lika stora.

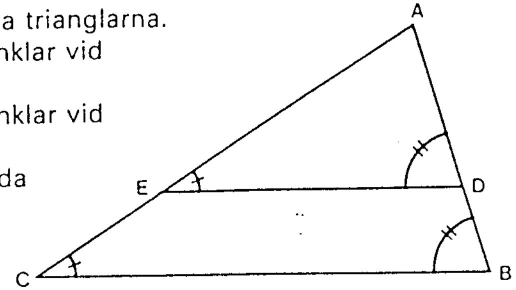
För trianglarna ovan gäller:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ utläses "triangeln ABC är likformig med triangeln DEF"

578 Avgör om följande påståenden är riktiga.
a Två kvadrater är alltid likformiga.
b Två rätvinkliga trianglar är alltid likformiga.
c Två rektanglar är alltid likformiga.
d Två liksidiga trianglar är alltid likformiga.
e Två likbenta trianglar är alltid likformiga.
f Två cirklar är alltid likformiga.

En linje, som skär två andra linjer, kallas *transversal.*

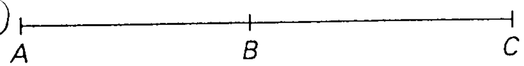


Då en transversal är parallell med en sida i en triangel avskäres en *topptriangel*, som är likformig med hela triangeln.



$\angle A$ är gemensam i de båda trianglarna.
$\angle B = \angle ADE$ (likbelägna vinklar vid parallella linjer)
$\angle C = \angle AED$ (likbelägna vinklar vid parallella linjer)
Eftersom vinklarna i de båda trianglarna är lika stora är trianglarna likformiga.
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

589



Rita av figuren. Rita med AB som diameter en cirkel. Beteckna cirkelns medelpunkt med O. Drag en av tangenterna från C. Tangeringspunkten betecknas med D. Drag tangenten genom A. De båda tangenterna skär varandra i punkten E. Markera lika stora vinklar med samma tecken och ange de trianglar, som är likformiga.

801 I en cirkel är en liksidig triangel inskriven. Cirkelns radie är 6 cm. Beräkna triangelns area.