Kapitel 5

Hotellings T^2

5.1 Inferens om väntevärde

5.1.1 Test av $H_0 : \mu = \mu_0$ univariat:

Använd teststorheten

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

då observationerna är fördelade enligt $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ med okänt σ^2. Om nollhypotesen är sann är t fördelad som en t-fördelad variabel med $n-1$ frihetsgrader. Då följer också att

$$t^2 = n(\bar{X} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$$

under nollhypotesen är fördelad som en F-fördelad variabel med 1 och $n-1$ frihetsgrader. De två testen är ekvivalenta vid tvåsidig mothypotes.

5.1.2 Test av $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ multivariat.

I detta avsnitt är $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ oberoende p-dimensionella observationer från $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Vidare är

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$$

och

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})'$$

Använd teststorheten

$$T^2 = n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' S^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

om observationerna är fördelade enligt $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ med okänt $\boldsymbol{\Sigma}$. Om nollhypotesen gäller så är

$$\frac{n-p}{(n-1)p} T^2$$

F-fördelad med p och $n-p$ frihetsgrader.

5.1.3 Optimalitet

Vid test av H_0 mot $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ är Hotellings T^2 ekvivalent med det generaliserade likelihoodtestet som förkastar H_0 för små värden på

$$\Lambda = (1 + \frac{T^2}{n-1})^{-n/2}$$

(JW Result 5.1)

5.1.4 Konfidensområde baserat på T^2

Ett $1-\alpha$ konfidensområde för $\boldsymbol{\mu}$ består av alla de punkter $\boldsymbol{\mu}_0$ sådana att

$$n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq \frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)$$

($H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ förkastas ej). Konfidensområdet utgör en ellipsoid med centrumpunkt $\bar{\boldsymbol{X}}$. Längden hos axlarna och ellipsoidens orientering bestäms av egenvärden och egenvektorer till $\boldsymbol{S}$.

5.1.5 Anmärkning

Ett test av $H_0 : \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}_0$ sker med den univariata teststorheten

$$t_a^2 = \frac{(\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}_0)^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}/n}$$

Med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet visas att

$$\max_{\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}} t_a^2 = T^2$$

För att visa detta använder vi följande form av Cauchy-Schwartz olikhet:

$$\max_{\boldsymbol{a}} \frac{(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$$

Sätt nu $\boldsymbol{d} = (\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ och $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}/n$.

5.1.6 Simultana intervall

Det gäller för *alla* $\boldsymbol{a}$ *samtidigt* att $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ ligger i intervallet med ändpunkter

$$\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{X}} \pm \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}$$

med sannolikhet $1-\alpha$. Detta visas på i princip samma sätt som tidigare:

$$\max_{\boldsymbol{a}} t_{\boldsymbol{a}}^2 \leq F_{p,n-p}(\alpha) = c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$t_{\boldsymbol{a}}^2 \leq c^2 \quad \forall \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$-c \leq t_{\boldsymbol{a}} \leq c^2 \quad \forall \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$-c \leq \frac{\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}/n}} \leq c^2 \quad \forall \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{X}} \pm \sqrt{F_{p,n-p}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}/n}$$

5.1.7 Anmärkning

Det gäller för ett *specifikt* $\boldsymbol{a}$ att $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ ligger i ett intervall med ändpunkter

$$\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{X}} \pm \sqrt{\frac{1}{n}F_{1,n-1}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}$$

med sannolikhet $1-\alpha$.

Speciellt gäller att μ_i ligger i ett intervall med ändpunkter

$$\bar{X}_i \pm \sqrt{\frac{1}{n}F_{1,n-1}(\alpha)s_{ii}}$$

med sannolikhet $1-\alpha$.

5.1.8 Simultana konfidensintervall

Definiera händelsen E_i som händelsen att

$$\bar{X}_i \pm t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{s_{ii}/n}$$

täcker över μ_i (t-intervallet för μ_i täcker μ_i.) Då gäller att

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^p E_i) &= 1 - P(\cup_{i=1}^p E_i^c) \geq 1 - \sum_{i=1}^p P(E_i^c) \qquad \text{(Bonferroni)} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^p \alpha = 1 - p\alpha \end{aligned}$$

Alltså: Simultana konfidensintervall erhållna från p st t-intervall ...

Om de olika E_i vore oberoende så skulle gälla att

$$P(\cap_{i=1}^p E_i) = (1-\alpha)^p < 1-\alpha$$

då $p > 1$.

EXEMPEL Med $\alpha = 0.01$ och $p = 10$ blir $(1-\alpha)^p = 0.99^{10} = 0.9044$.

5.1.9 Bonferroni intervall

Fördela α över t-intervallen:

$$\bar{X}_i \pm t_{n-1}(\alpha_i/2)\sqrt{s_i^2/n}$$

där $\sum_{i=1}^p \alpha_i = \alpha$.

5.1.10 I praktiken

har vi alltså två metoder att beräkna konfidensintervall. Hotelling T^2 har exact konfidensgrad och uttalar sig om alla linjärkombinationer. Bonferronis metod uttalar sig endast om några stycken.

5.1.11 Varianter av T^2 test

Låt C vara en $r \times p$ matris ($r \leq p$) Testa hypotesen

$$H_0 : \boldsymbol{C\mu} = \boldsymbol{C\mu}_0$$

(Vanligast: $H_0 : \boldsymbol{C\mu} = \boldsymbol{0}$.) Bilda teststorheten

$$T^2 = n(\boldsymbol{C\bar{X}} - \boldsymbol{C\mu}_0)'(\boldsymbol{CSC}')^{-1}(\boldsymbol{C\bar{X}} - \boldsymbol{C\mu}_0)$$

Under H_0 gäller att

$$\frac{n-r}{(n-1)r}T^2$$

har en F-fördelning med r och $n-r$ frihetsgrader.

5.1.12 Kontraster

En kontrast (kontrastvektor) definieras av att $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1} = 0$. En kontrastmatris C består av rader av konstrastvektorer.

EXEMPEL

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Antag att vi vill testa

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p$$

istället för $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$. Vi skulle kunna välja

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ . & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

och transformera observationerna enligt $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX}_i$ som får väntevärdet

$$\boldsymbol{C\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 - \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_1 - \mu_p \end{pmatrix}$$

Vi testar nu $H_0 : \boldsymbol{C\mu} = \boldsymbol{0}$ vilket är detsamma som $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p$.

5.2 Jämförelse av två stickprov, univariat

Stickprov från $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ och $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Vi vill testa hypotesen

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

(Vanligast är $\delta = 0$.)

5.2.1 J2, lika varians, univariat

Använd test-storheten

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{s_{\text{poolad}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

där

$$s^2_{\text{poolad}} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

är den gemensamma skattningen av σ^2.

Under nollhypotesen har t en t-fördelning med $n_1 + n_2 - 2$ frihetsgrader.

5.2.2 J2, olika varians, univariat

Behrens-Fishers problem. Ett likformigt starkaste test finns inte. Man bildar teststorheten

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{1}{n_1}s_1^2 + \frac{1}{n_2}s_2^2}}$$

Under H_0 har t ungefär en t-fördelning med

$$\frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

frihetsgrader. (Welch 1949).

5.2.3 J2, lika kovariansmatriser, multivariat

Använd teststorheten

$$T^2 = (\bar{\boldsymbol{X}}_1 - \bar{\boldsymbol{X}}_2 - \boldsymbol{\delta})'(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\boldsymbol{S}_{\text{poolad}})^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}_1 - \bar{\boldsymbol{X}}_2 - \boldsymbol{\delta})$$

där

$$\boldsymbol{S}_{\text{poolad}} = ((n_1 - 1)\boldsymbol{S}_1 + (n_2 - 1)\boldsymbol{S}_2)/(n_1 + n_2 - 2)$$

är en gemensam skattning av $\boldsymbol{\Sigma}$.

Under H_0 har

$$\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{n_1 + n_2 - p - 1}T^2$$

en F-fördelning med p och $n_1 + n_2 - p - 1$ frihetsgrader.

5.2.4 Konfidensområde baserad på T^2.

5.2.5 Anmärkning

5.2.6 J2, olika kovariansmatriser, multivariat

Nu till Behrens-Fishers problem i multivariat form.

$$T^2 = (\bar{\boldsymbol{X}}_1 - \bar{\boldsymbol{X}}_2 - \boldsymbol{\delta})'(\frac{1}{n_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{1}{n_2}\boldsymbol{S}_2)^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}_1 - \bar{\boldsymbol{X}}_2 - \boldsymbol{\delta})$$

Under H_0 har T^2 asymptotiskt en χ^2 fördelning med p frihetsgrader.

5.2.7 Normalitet

Om stickproven inte är normalfördelade kan man motivera de behandlade teknikerna med utgångspunkt från centrala gränsvärdessatsen ($\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)$ är asymptotiskt normalfördelad.