Om $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = 0$ sägs $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ vara ortogonala, vilket skrivs som $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Vinkeln θ mellan två vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ definieras av

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{L_{\boldsymbol{x}} L_{\boldsymbol{y}}}$$

Linjärt oberoende vektorer Vektorerna $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ sägs vara *linjärt beorende* om det finns tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$ som inte alla är 0, sådana att

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

Definition Rangen hos en matris (eng: rank) är antalet linjärt oberoende kolumner.

Definition En kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ är *icke-singulär* om ekvationssystemet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ endast har lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Räkneregler för determinanter:

1. $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$
2. Om en rad eller en kolonn i $\boldsymbol{A}$ är noll är $|\boldsymbol{A}| = 0$
3. Om två rader eller kolonner är identiska är $|\boldsymbol{A}| = 0$
4. Om $\boldsymbol{A}$ är icke-singulär är $|\boldsymbol{A}^{-1}| = 1/|\boldsymbol{A}|$.
5. $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
6. $|c\boldsymbol{A}| = c^k|\boldsymbol{A}|$

Definition Spåret av $\boldsymbol{A}$, kvadratisk, (eng: trace), betecknas $tr(\boldsymbol{A})$ och är summan av elementen i huvuddiagonalen i $\boldsymbol{A}$.

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

Det gäller att

$$tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$$

Egenvärden och egenvektorer

En kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ har egenvärdet λ och egenvektorn $\boldsymbol{e}$ om

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$$

Om $\boldsymbol{A}$ är en symmetrisk $k \times k$ matris finns k egenvärden och egenvektorer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ resp $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

Om $\boldsymbol{e}$ är en egenvektor till $\boldsymbol{A}$ med egenvärde λ så är $b\boldsymbol{e}$ också en egenvektor till $\boldsymbol{A}$ med egenvärde λ.

När vi söker efter egenvektorer och motsvarande egenvärden söker vi $\boldsymbol{x}$ sådana att

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \text{eller} \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Om $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ är singulär har ekvationssystemet endast lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

För att det skall finnas egenvektorer måste alltså $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ vara singulär och således

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

Denna ekvation kallas *karakteristiska ekvationen*.

Ex:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Karateristiska ekvationen blir

$$(3-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0$$

eller

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Denna har lösningarna

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = 1$$

Sök egenvektor $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{pmatrix}$ svarande mot λ_1:

$$3e_{11} + 2e_{12} = \lambda_1 e_{11}$$

$$2e_{11} + 3e_{12} = \lambda_1 e_{12}$$

ger

$$2e_{11} = 2e_{12}$$

$$e_{11} = e_{12}$$

Eftersom $e_{12}^2 = 1 - e_{11}^2$ så

$$e_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

*

Ex:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Karateristiska ekvationen blir

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0$$

eller

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

Denna har lösningarna

$$\lambda_1 = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{och} \quad \lambda_2 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Sök egenvektor svarande mot λ_1:

$$4e_{11} + 2e_{12} = \lambda_1 e_{11}$$

$$2e_{11} + 3e_{12} = \lambda_1 e_{12}$$

ger

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2} e_{11} = 2e_{12}$$

$$e_{11} = \frac{\sqrt{17}+1}{4} e_{12}$$

Eftersom $e_{12}^2 = 1 - e_{11}^2$ så

$$e_{12} = \frac{16}{34 + 2\sqrt{17}}$$

*

Om $\boldsymbol{A}$ är en symmetrisk (reell) $k \times k$ matris så är egenvektorerna hörande till olika egenvärden ortogonala.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \lambda_j \boldsymbol{e}_i$$

Symmetrin gör att $\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$ så att $\boldsymbol{e}_i'\lambda_j\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j'\lambda_i\boldsymbol{e}_i$. Om $\lambda_i \neq \lambda_j$ inträffar detta endast om $\boldsymbol{e}_j'\boldsymbol{e}_i = 0$, dvs $\boldsymbol{e}_j \perp \boldsymbol{e}_i$.

2.3 Positivt definita matriser

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{P\Lambda P}'$$

där

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$$

är ortogonal, dvs $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{I}$ och

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

är diagonal.

Uttrycket $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ kallas för en *kvadratisk form*.

Definition Om $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ för alla $\boldsymbol{x}$ sägs $\boldsymbol{A}$ vara *icke-negativt definit*. Om likhet gäller endast för $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, så sägs $\boldsymbol{A}$ vara *positivt definit*.

Ex. $2x_1^2 + x_2^2 \geq 0$. Detta kan skrivas $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ med

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Om $\boldsymbol{A}$ är positivt definit så är alla egenvärden till $\boldsymbol{A}$ positiva. (Om $\boldsymbol{A}$ är icke-negativt definit gäller att alla egenvärden till $\boldsymbol{A}$ är icke negativa.)

2.4 Kvadratrotmatris

En matris $\boldsymbol{B}$ sådan att $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ sägs vara en kvadratrotmatris till $\boldsymbol{A}$. Vi använder beteckningen $\boldsymbol{A}^{1/2}$ för $\boldsymbol{B}$.

Om $\boldsymbol{A}$ är positivt definit finns en sådan matris: Om $\boldsymbol{A}: k\times k$ p.d. så

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i'$$

där $\lambda_i>0$, eller

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}'$$

enligt ovan.

Definiera $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$ genom

$$\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0\\ . & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k}\end{pmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{A}^{1/2}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{P}'$$

Då gäller att

$$\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}=\boldsymbol{\Lambda}$$

och

$$\boldsymbol{A}^{1/2}\cdot\boldsymbol{A}^{1/2}=\boldsymbol{A}$$

2.5 Slumpvektorer och slumpmatriser

Slumpvektor: vektor av slumpvariabler (s.v.er)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix}$$

Slumpmatris: matris av slumpvariabler (s.v.er)

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

2.6 Väntevärdesvektor och kovariansmatris

Vektor av populationsmedelvärden

Givet ett populationsmedelvärde (väntevärde) för en enskild variabel j

$$\mu_j = E(X_j)$$

definieras

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$$

Väntevärdesvektor

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ E(x_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_k \end{pmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} E(x_{11}) & E(x_{12}) & \dots & E(x_{1p}) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ E(x_{n1}) & E(x_{n2}) & \dots & E(x_{np}) \end{pmatrix}$$

Räkneregler

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(X_{ij}))$$

$$E(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = E(\boldsymbol{X}) + E(\boldsymbol{Y})$$

$$E(A\boldsymbol{X}B) = AE(\boldsymbol{X})B$$

Populationskovariansmatris $\boldsymbol{\Sigma}$

Givet populationsvarianser och kovarianser

$$\sigma_{ij} = E((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j))$$

mellan par av variabler definieras

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}.$$

Populationskorrelationsmatris $\boldsymbol{\rho}$

Givet populationskorrelationer

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$$

definieras

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Om

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

så gäller att

$$D^{1/2}\boldsymbol{\rho}D^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$$

och

$$D^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}D^{-1/2} = \boldsymbol{\rho}$$

2.7 Matrisolikheter och maximering

Cauchy-Schwarz olikhet

För $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{d}$ godtyckliga $p \times 1$ vektorer gäller att

$$(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{d})^2 \leq (\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d})$$

Generalisering: Om $\boldsymbol{B}$ positivt definit så

$$(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{d})^2 \leq (\boldsymbol{b}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d})$$

Maximering

För givet $\boldsymbol{d}$ och $\boldsymbol{B}$ positivt definit gäller att

$$\max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$$

Ex: $\sum\sum a_{ij}x_ix_j = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ (A symmetrisk)

$\frac{df}{dx_i} = 2\sum a_{ij}x_j \Rightarrow \frac{df}{d\boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x}$

Om $\boldsymbol{B}$ $(p \times p)$ är positivt definit med egenvärden $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$ och motsvarande egenvektorer $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ gäller att

$$\min_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \lambda_p$$

uppnås för $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_p$.

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \lambda_1$$

uppnås för $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$.

Dessutom uppnås

$$\max_{\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k} \frac{\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \lambda_{k+1}$$

för $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_{k+1}, k = 1, \ldots, p-1$