Mathematica Lab 6

■ Uppgift 1

a)

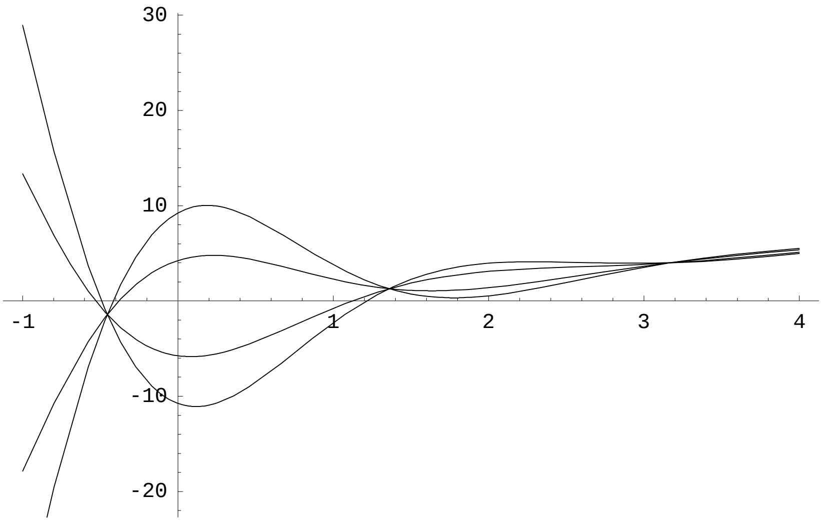
```
Clear@"`*"D
lösn1a = DSolve@y''@xD + 2 y'@xD + 4 y@xD == 6 x, y@xD, xD •. 8C@2D -> A, C@1D -> B<
```

$$99y@xD \to -\frac{3}{4} + \frac{3\,x}{2} + A\,E^{-x}\,\text{CosA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE} - B\,E^{-x}\,\text{SinA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE==}$$

b)

$$f@x\_D = \frac{3\,x}{2} - \frac{3}{4} + \text{Exp@-xD} * 10 * \text{CosA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE} - \text{Exp@-xD} * \text{H-10L} * \text{SinA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE;}$$
$$g@x\_D = \frac{3\,x}{2} - \frac{3}{4} + \text{Exp@-xD} * \text{H-10L} * \text{CosA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE} - \text{Exp@-xD} * 10 * \text{SinA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE;}$$
$$h@x\_D = \frac{3\,x}{2} - \frac{3}{4} + \text{Exp@-xD} * 5 * \text{CosA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE} - \text{Exp@-xD} * \text{H-5L} * \text{SinA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE;}$$
$$q@x\_D = \frac{3\,x}{2} - \frac{3}{4} + \text{Exp@-xD} * \text{H-5L} * \text{CosA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE} - \text{Exp@-xD} * 5 * \text{SinA}^{\bullet!!!}3\ \text{xE;}$$

```
Plot@8f@xD, g@xD, h@xD, q@xD<, 8x, -1, 4<D
```



- Graphics -

c)

Eftersom asymptoten ar gemensam för alla kurvor räcker det ju med en:

```
k = LimitA f@xD / x , x -> ∞E •• N;
m = Limit@Hf@xD - k * xL, x -> ∞D;
y1 = k * x + m •. 91.5 -> 3/2 =;
Print@"Svar: aL y = ", y@xD •. lösn1a@@1DDD
Print@"      cL Asymptoten är y = ", y1D
```

```
Svar: aL y = -3/4 + 3 x/2 + A E^-x CosA•!!!3 xE - B E^-x SinA•!!!3 xE

      cL Asymptoten är y = -3/4 + 3 x/2
```

■ Uppgift 2

Formeln lyder: $\frac{dF}{dt}$ kF^2, detta löser vi sedan som en diffekvation

```
Clear@"`*"D
diffekv2 = F'@tD + k * F@tD^2 == 0;
begvillkor2a = F@0D == 1000;
lösn2 = DSolve@8diffekv2, begvillkor2a<, F@tD, tD
```

```
99F@tD -> 1000/(1 + 1000 k t)==
```

```
Flug@t_D = F@tD •. lösn2@@1DD;
k1 = k •. Solve@Flug@10D == 800, kD
```

```
9 1/40000 =
```

```
AntFlug@t_D = Flug@tD •. 8k -> k1<
```

```
9 1000/(1 + t/40) =
```

```
Print@"Svar: Efter ett dygn finns det ", Round@AntFlug@24D@@1DDD, " bananflugor"D
```

```
Svar: Efter ett dygn finns det 625 bananflugor
```

■ Uppgift 3

Om man gör en potentialvandring ger det: $\left(\frac{dq}{dt}\quad q'(t),\ \frac{d^2 q}{dt^2}\quad q''(t)\right)$. i(t) = q'(t). Laddningen vid tiden t = 0 och strömmen (i[t] = q'[t]) vid tiden t = 0 är ju 0, noll, nada, inget, NOTHING!!

a)

```
Clear@"`*"D
C1 = 20 * 10^-3; L1 = 2; R1 = 4;
diffekv3a = L1 * q''@tD + q@tD/C1 + R1 * q'@tD == 30;
lösn = q@tD •. DSolve@8diffekv3a, q@0D == 0, q'@0D == 0<, q@tD, tD;
q@t_D = lösn@@1DD •• Simplify
```

```
1/20 E^-t I12 E^t - 12 CosA2 •!!! 6 tE - •!!! 6 SinA2 •!!! 6 tEM
```

```
i@t_D = q'@tD •• Simplify
```

```
5/2 $ 3/2 E^-t SinA2 •!!! 6 tE
```

b)

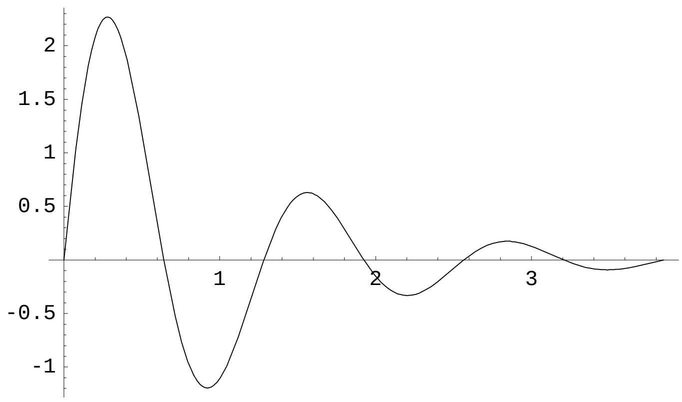
Vi vet ju att sin(t) är ju det som anger perioden och = 2 f samt att perioden T = $\frac{1}{f}$

```
ω = 2 •!!! 6 == 2 π * f;
lösn = f •. Solve@ω, fD;
f1 = lösn@@1DD;
T = 1/f1
```

```
π/•!!! 6
```

c)

```
Plot@i@tD, 8t, 0, 3 T<D
```




```
- Graphics -
```

```
Print@"Svar: aL Strömmen är iHtL = ", i@tD, " @AD"D
Print@"      bL Perioden T = ", T, " s"D
```

```
Svar: aL Strömmen är iHtL = 5/2 $!!!3/2 E^-t SinA2 •!!!6 tE @AD

      bL Perioden T = π/•!!!6 s
```

■ Uppgift 4

a)

Först löser vi ut q(t) på samma sätt som i uppgift 3

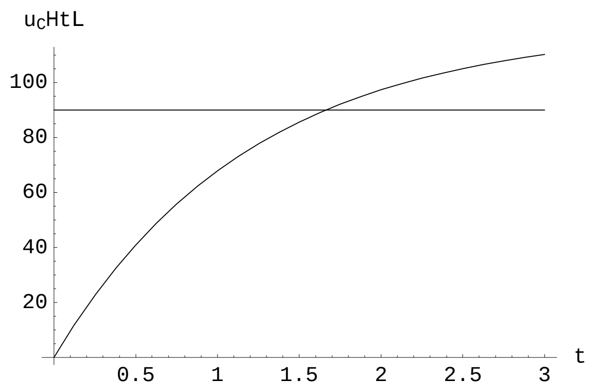
```
Clear@"`*"D
diffekv4a = q@tD/(100*10^-6) + 12*10^3*q'@tD == 120;
lösn4a = q@tD •. DSolve@8diffekv4a, q@0D == 0<, q@tD, tD •• Simplify;
q@t_D = lösn4a@@1DD
```

```
3/250 H1 - E^(-5 t•6)L
```

Spänningen över kondensatorn är $\frac{q(t)}{C.}$

```
uC = q@tD/(100*10^-6)
Plot@8uC, 90<, 8t, 0, 3<, AxesLabel -> 8"t", "uCHtL"<D
```

```
120 H1 - E^(-5 t•6)L
```




```
- Graphics -
```

```
uc@t_D := 120 H1 - E^(-5 t•6)L
t1 = t •. FindRoot@uc@tD == 90, 8t, 1.5<D
```

```
1.66355
```

I texten står det att kondensatorn laddas ur omedelbart dvs efter t = 1,66355 s så börjar den laddas upp igen med andra ord: perioden börjar om igen.

Således perioden är 1,66355 s och antalet blinkningar är $\frac{60}{T}$ (eftersom 60 $[s/\min]/x\,[s]$, $\frac{s}{\min}/s$ $\quad \frac{s}{\min}\ \frac{1}{s}\quad \frac{1}{\min}$)

```
T = t1;
BlinkPerMinut = Round@60 • TD
```

36

b)

i(t) = q'(t). Detta löser vi och sedan sätter vi in tiden t = 1,66355 s enligt a)

```
i@t_D = q'@tD
```

$\frac{1}{100} E^{-5 t \bullet 6}$

```
ström = i@TD * 1000 H*mA*L
```

2.5

```
Print@"Svar: aL Lampan blinkar med ", BlinkPerMinut, " blinkningar•minut"D
Print@"      bL Strömstyrkan då lampan tänder är ", ström, " mA"D
```

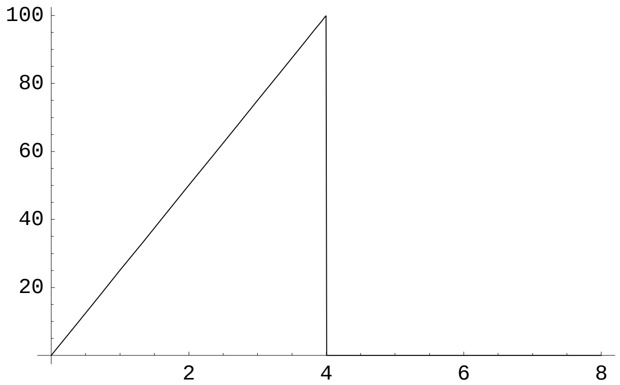
Svar: aL Lampan blinkar med 36 blinkningar•minut

bL Strömstyrkan då lampan tänder är 2.5 mA

■ Uppgift 5

Om vi granskar kurvan ser vi att h(t) måste lösas mha Heavisides stegfunktion enl boken.
Vi skapar sedan som vanligt en diff ekv mha KVL

```
Clear@"`*"D
<< Calculus`DiracDelta`
h@t_D := 100/4 t * HUnitStep@tD - UnitStep@t - 4DL
Plot@h@tD, 8t, 0, 8<D
```



- Graphics -

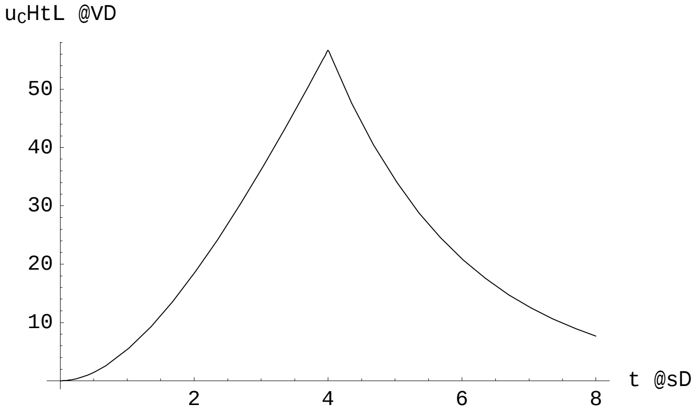
a)

```
diffekv5 = 500 * q'@tD + q@tD/(4 * 10^-3) == h@tD;
lösn5 = q@tD •. DSolve@8diffekv5, q@0D == 0<, q@tD, tD •• Simplify;
q@t_D = lösn5@@1DD
```

```
1/10 I I2 + 2 E^(2 - t/2) - tM UnitStep@-4 + tD + H-2 + 2 E^(-t•2) + tL UnitStep@tDM
```

Avanstående formel är bara att HAJA!!

```
uc = q@tD/(4 * 10^-3);
Plot@uc, 8t, 0, 8<, AxesLabel -> 8"t @sD", "uCHtL @VD"<D
```

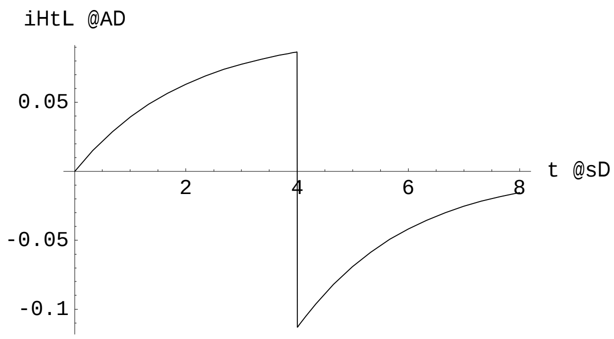



```
- Graphics -
```

b)

Stömmen i kretsen är ju i(t) = q'(t)

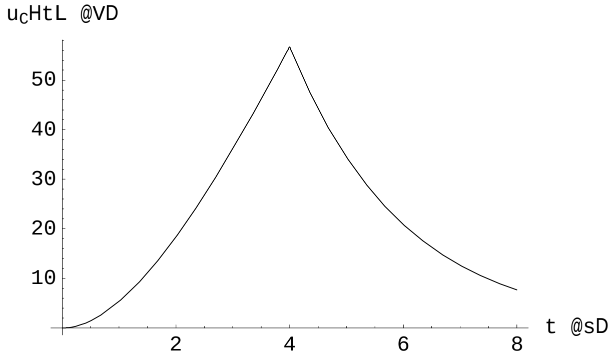
```
i@t_D := q'@tD
Plot@i@tD, 8t, 0, 8<, AxesLabel -> 8"t @sD", "iHtL @AD"<D
```



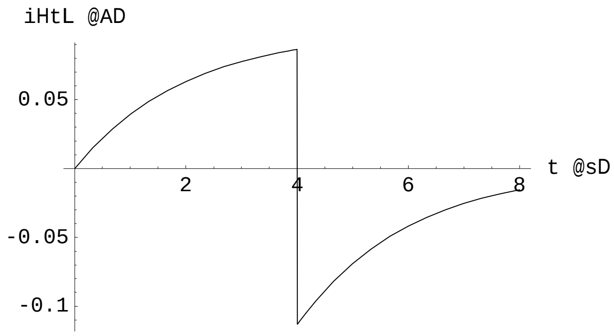

```
- Graphics -
```

```
Print@"Svar: aL Spänningen över kondensatorn"D
Plot@uc, 8t, 0, 8<, AxesLabel -> 8"t @sD", "uCHtL @VD"<D
Print@"      bL Strömmen i kretsen"D
Plot@i@tD, 8t, 0, 8<, AxesLabel -> 8"t @sD", "iHtL @AD"<D
```

```
Svar: aL Spänningen över kondensatorn
```



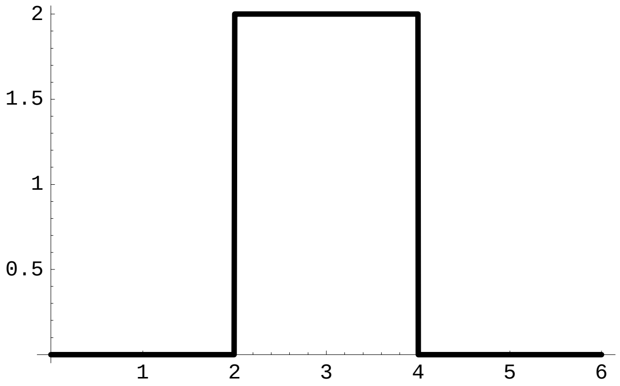

```
      bL Strömmen i kretsen
```



■ Uppgift 6

Samma sätt som i uppgift 5

```
Clear@"`*"D
<< Calculus`DiracDelta`
h@t_D = 2 * HUnitStep@t - 2D - UnitStep@t - 4DL;
Plot@h@tD, 8t, 0, 6<, PlotStyle -> Thickness@0.01DD
```

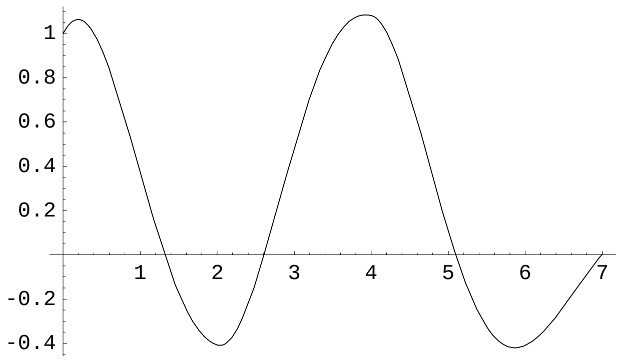


- Graphics -

Nu använder vi NDSolve eftersom vi vill ange lösning inom intervallet 0-7

```
diffekv6 = y''@tD + y'@tD + 3 y@tD == h@tD;
lösn6 = y@tD /. NDSolveA9diffekv6, y@0D == 1, y'@0D == 2/3=, y@tD, 8t, 0, 7<E;
f@t_D = lösn6@@1DD // Simplify
Plot@f@tD, 8t, 0, 7<D
```

InterpolatingFunction@880., 7.<<, <>D@tD



- Graphics -

Nu söker vi max och minpunkt inom detta område

```
tmin = t /. FindRoot@f'@tD == 0, 8t, 2<D
tmax = t /. FindRoot@f'@tD == 0, 8t, 4<D
```

2.03435

3.9288

```
Print@"Svar: ", f@tminD, " ≤ y ≤ ", f@tmaxDD
```

Svar: -0.409251 ≤ y ≤ 1.08393

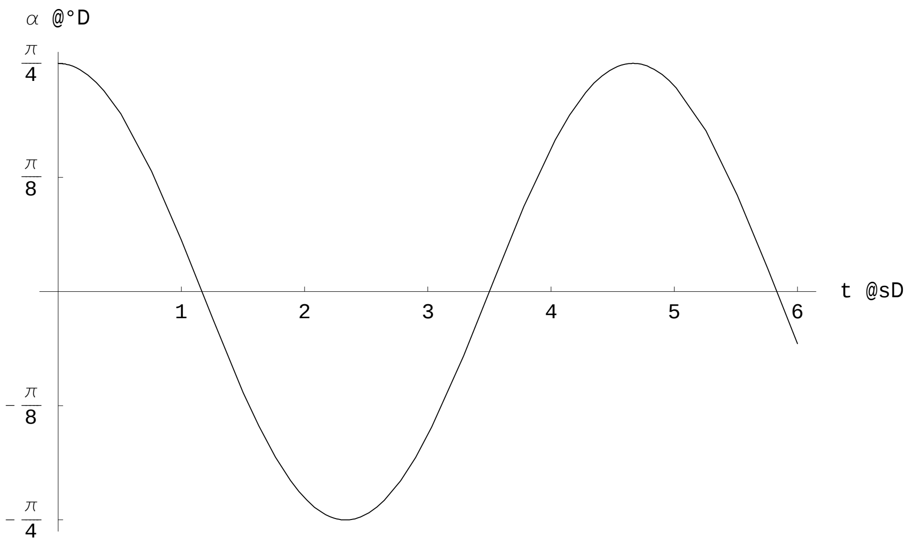
■ Uppgift 7

```
Clear@"`*"D
diffekv7 = φ''@tD + 9.81/5 * Sin@φ@tDD == 0;
lösn7 = φ@tD •. NDSolveA9diffekv7, φ@0D == π/4, φ'@0D == 0=, φ@tD, 8t, 0, 6<E;
α@t_D = lösn7@@1DD
```

```
InterpolatingFunction@880., 6.<<, <>D@tD
```

a)

```
PlotAα@tD, 8t, 0, 6<, AxesLabel -> 8"t @sD", "α @°D"<,
 Ticks -> 980, 1, 2, 3, 4, 5, 6<, 9-π/4, -π/8, 0, π/8, π/4==E
```




```
- Graphics -
```

Nu ska vi ta reda på perioden, och börjar med att hitta maxpunkterna, eftersom en maxpunkt är t = 0 så tar vi reda på nästa maxpunkt och får således svängningstiden.

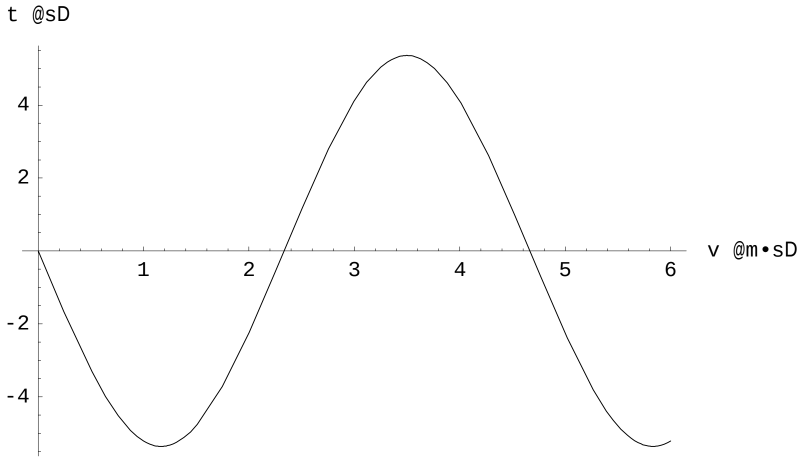
```
T = t •. FindRoot@α'@tD == 0, 8t, 4.5<D
```

```
4.66501
```

b)

Hastigheten är längden på pendeln multiplicerat med vinkelhastigheten '(t) dvs v(t) = l* '(t) eller $\frac{rad}{s}$ m $\frac{m}{s}$

```
v@t_D = α'@tD * 5;
Plot@v@tD, 8t, 0, 6<, AxesLabel -> 8"v @m•sD", "t @sD"<D
```




```
- Graphics -
```

```
t1 = t •. FindRoot@v'@tD, 8t, 3.5<D
```

```
3.49884
```

```
maxhast = v@t1D
```

```
5.36035
```

```
Print@"Svar: aL Svängningstiden är ", N@T, 3D, " s"D
Print@"      bL Maxhastigheten är ", N@maxhast, 3D, " m•s"D
```

```
Svar: aL Svängningstiden är 4.67 s

      bL Maxhastigheten är 5.36 m•s
```

■ Uppgift 8

Alla mått är i dm eftersom 200 l = 200 dm^3. 0,5 m = 5 dm.
Först och främst tar vi reda på prop. konstanten, k. Den bestämmer hur fort tanken töms (med de rådande måtten på cylindern samt hur lång tid det tar att tömma tanken).
Ändring av volymen, $\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}$. (1)
Ändringen av volymen, dV = r^2 dh, om vi dividerar bägge sidor med dt fås: $\frac{dV}{dt}$ $r^2 \frac{dh}{dt}$. (2)
Om vi sätter ihop (1) och (2) fås: $k\sqrt{h}$ $r^2 \frac{dh}{dt}$. Den diff.ekv. är ju separabel: k dt $\frac{r^2}{\sqrt{h}}$ dh, t = 0 ger h = 50, som självklart är höjden på cylindern. Den diff.ekv. löses:

```
Clear@"`*"D
```

$$\text{ekv} = \int_0^t -k\, dt == \int_{50}^{h} \frac{\pi * 5^2}{\sqrt{h}}\, dh$$

$$-k\, t == -250\sqrt{2}\,\pi + 50\sqrt{h}\,\pi$$

Ur denna ekvation kan vi sedan beräkna k. Eftersom när tiden, t = 30 min är ju höjden h = 0 dm.

```
8k1< = k •. Solve@ekv •. 8t -> 30, h -> 0<, kD
```

$$9\frac{25\ \sqrt{2}\ \pi}{3}=$$

Nu har vi ju det k-värde som behövs för vidare beräkningar. När man häller på 200 $\frac{dm^3}{minut}$ så ökas ju volymen, men den minskar ju fortfarande eftersom kranen är öppen. Således ändras volymen som: 200 $k\sqrt{h}$, och k vet vi ju. Samma som ovan: $k\sqrt{h}$ $r^2\ \frac{dh}{dt}$ fast: $\left(200 \quad k\sqrt{h}\right)$ $r^2\ \frac{dh}{dt}$ eftersom det är vår nya ekvation. Den här gången startar höjden på 10 dm och sedan vet vi inte vad som händer (vi sätter även t = 0 för enkelhetens skull).

```
ekv2 = à_0^t I200 - k1 •!!! h M dt == à_10^h π * 5^2 dh
```

```
J200 - 25/3 •!!! 2 •!!! h πN t == -250 π + 25 h π
```

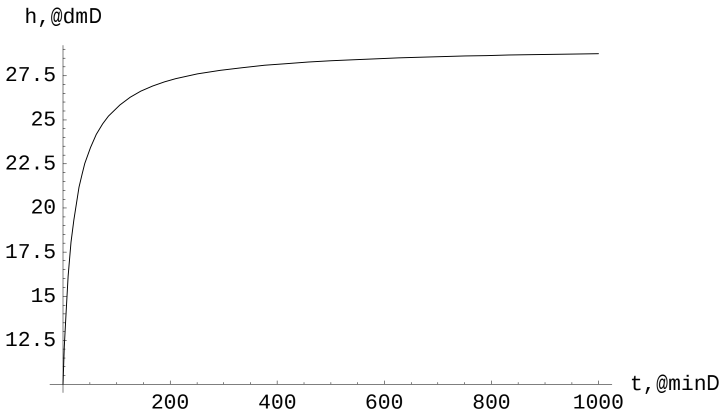
Ur denna ekvation löser vi sedan ut h som funktion av tiden, h(t).

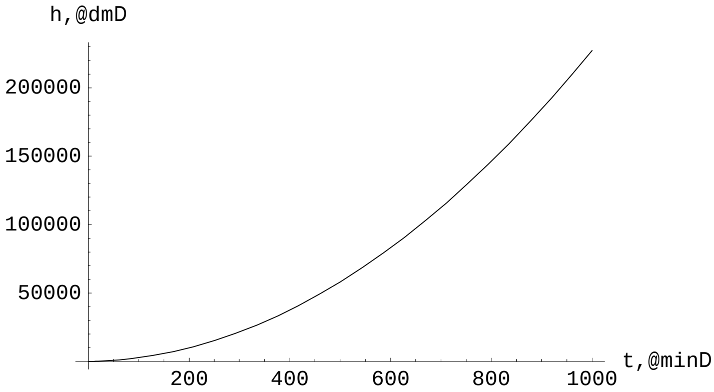
```
lösn = Solve@ekv2, hD
```

```
99h -> 1/(9 π^2) I90 π^2 + 72 π t + π^2 t^2 - π^(3•2) t •!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! 180 π + 144 t + π t^2 M=,
 9h -> 1/(9 π^2) I90 π^2 + 72 π t + π^2 t^2 + π^(3•2) t •!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! 180 π + 144 t + π t^2 M==
```

Jaha, vi får tydligen två lösningar på h(t). Tittar vi närmare på lösn 2 ser vi att den har bara +-tecken vilket tyder på att höjden ökar hela tiden. Men för säkerhets skull plottar vi upp de:

```
h1@t_D = h •. lösn@@1DD;
h2@t_D = h •. lösn@@2DD;
Plot@h1@tD, 8t, 0, 1000<, AxesLabel -> 8"t,@minD", "h,@dmD"<D;
Plot@h2@tD, 8t, 0, 1000<, AxesLabel -> 8"t,@minD", "h,@dmD"<D;
```





Mycket riktigt, kurva 2 är ju helt fel. Men kurva 1 verkar ju helt rätt!! Den ser ju till och med ut att ha en asymptot runt 28 dm. Den tar vi reda på:

```
gräns = Limit@h1@tD, t -> ∞D
```

$$\frac{288}{\pi^2}$$

Mycket riktigt, det finns en asymptot vid h = $\frac{288}{2}$ dm (vad det nu är?). Då återstår bara svaret (Obs! Vi gör om dm till m genom att dela med 10):

```
Print@"Svar: Vattennivån stabiliseras då nivån är ", N@gräns•10, 3D, " meter."D;
```

```
Svar: Vattennivån stabiliseras då nivån är 2.92 meter.
```

■ Uppgift 9

Totala mängden vatten i sjön är 3000 m^2*8 m = 24 miljoner m^3. Mängden partiklar betecknas som p(t).
Varje år tillförs 10 $\frac{\text{parts}}{\text{miljon}}$ *7 miljoner m^3 = 70 parts. Men varje år är ju utflödet 7 miljoner m^3 förorenat vatten, således följer $\frac{7}{24}$ av antalet parts med, dvs $\frac{7}{24}\ p(t)$.

```
Clear@"`*"D
diffekv = p'@tD == 70 - 7/24 p@tD;
```

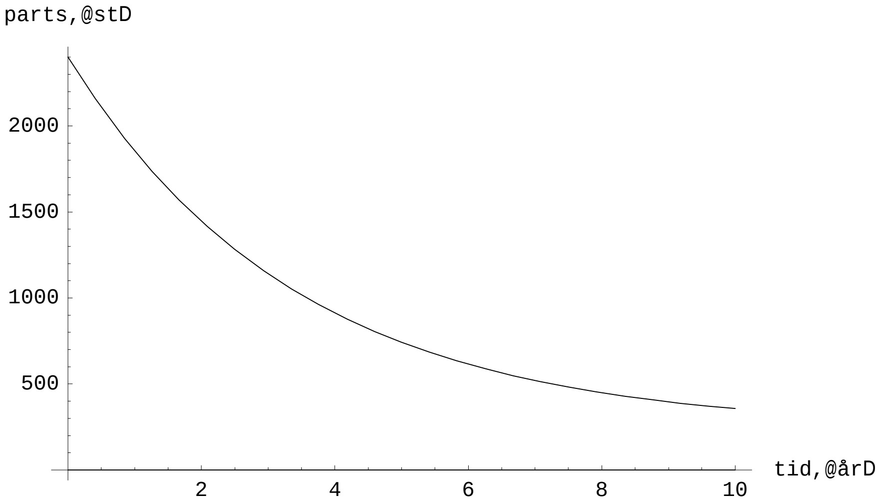
Från början var antalet parts 100 $\frac{\text{parts}}{\text{miljon}}$ * 24 miljoner = 2400 parts, dvs p(0) = 2400.

```
lösn = DSolve@8diffekv, p@0D == 2400<, p@tD, tD;
p1@t_D = p@tD •. lösn@@1DD
```

```
E-7 t•24 H2160 + 240 E7 t•24L
```

Först plottar vi kurvan för att se om allt verkar stämma:

```
Plot@8p1@tD, 0<, 8t, 0, 10<, AxesLabel -> 8"tid,@årD", "parts,@stD"<D;
```



Det som sökes är ju tiden då antalet $\frac{\text{parts}}{\text{miljon}}$ är 20. Det betyder ju att antalet parts i hela sjön är 20 $\frac{\text{parts}}{\text{miljon}}$ * 24 miljoner m^3 , vilket är 480 parts. Det verkar inträffa runt tiden 8 år.

```
tid = t •. FindRoot@p1@tD == 20 * 24, 8t, 8<D
p1@tidD
```

```
7.53334
```

```
480.
```

```
Print@"Svar: ", N@tid, 2D, " år"D
```

```
Svar: 7.5 år
```