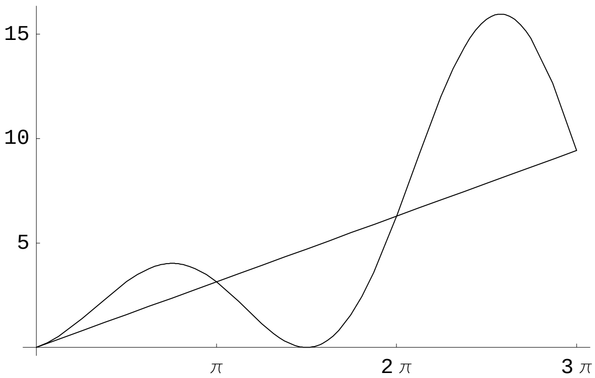
Mathematica Lab 5

■ Uppgift 1

```
Clear@"`*"D
Plot@8x + x * Sin@xD, x<, 8x, 0, 3 π<, Ticks -> 88π, 2 π, 3 π<, 85, 10, 15<<D
```




```
- Graphics -
```

4 skärningspunkter. Nu måste vi ta reda på dessa

```
y1@x_D = x + x * Sin@xD;
y2@x_D = x;
x0 = x •. FindRoot@y1@xD == y2@xD, 8x, 0<D
x1 = x •. FindRoot@y1@xD == y2@xD, 8x, π<D
x2 = x •. FindRoot@y1@xD == y2@xD, 8x, 2 π<D
x3 = x •. FindRoot@y1@xD == y2@xD, 8x, 3 π<D
```

```
0.

3.14159

6.28319

9.42478
```

Detta känner vi igen som , 2 och 3 så vi sätter in det för att få ekaxta svar.
Nu beräknar vi areorna för varje område, dx-integral verkar lättast. Värdena begränsas av y1 upptill och y2 nertill i första, y1 nertill och y2 upptill i andra och y1 upptill och y2 nertill i tredje

```
           π
area8a = à  Hy1@xD – y2@xDL dx;
           0
           2 π
area8b = à   Hy2@xD – y1@xDL dx;
           π
           3 π
area8c = à   Hy1@xD – y2@xDL dx;
           2 π
area8tot = area8a + area8b + area8c
```

9 π

```
Print@"Svar: Arean är ", area8tot, " a.e."D
```

Svar: Arean är 9 π a.e.

■ Uppgift 2

Laddningen i en kondensator är q = C *U_c, strömmen i en ledare är i(t) = $\frac{q}{t}$.

a)

```
Clear@"`*"D
C1 = 100 * 10^-6;
i@t_D := 0.2 * e^(-0.1*t) * 10^-3;
       2
Q1 = à  Hi@tDL dt
       0
```

0.000362538

```
ekv2a = Q1 == C1 * Uc1;
U1 = Uc1 •. Solve@ekv2aD;
u1 = N@U1@@1DD, 2D
```

3.6

b)

När t är den ju fullt uppladdad, dvs fullt laddad med matningsspänningen

```
       ∞
Q2 = à  Hi@tDL dt
       0
```

0.002

```
ekv2b = Q2 == C1 * Uc2;
U2 = Uc2 •. Solve@ekv2bD;
u2 = U2@@1DD
```

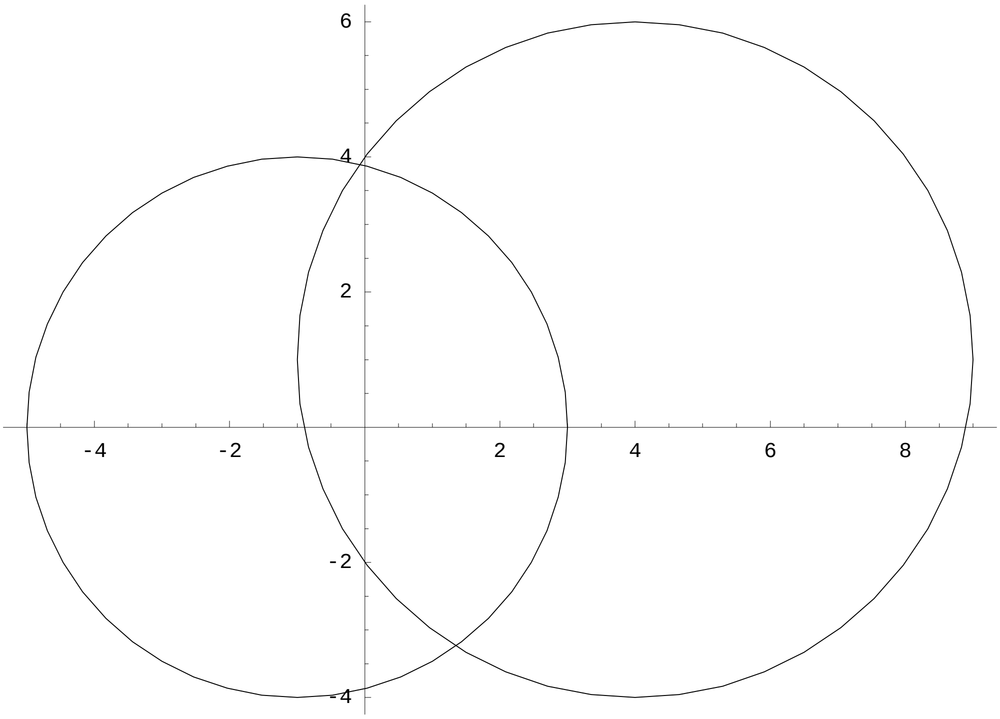
20.

```
Print@"Svar: aL ", u1, " V       bL ", Round@u2D, " V"D
```

Svar: aL 3.6 V   bL 20 V

■ Uppgift 3

```
Clear@"`*"D
Needs@"Graphics`ImplicitPlot`"D
cirkel3a = f@x_, y_D = Hx + 1L^2 + y^2 == 16;
cirkel3b = g@x_, y_D = Hx - 4L^2 + Hy - 1L^2 == 25;
ImplicitPlot@8cirkel3a, cirkel3b<, 8x, -5, 10<D;
```




```
88x1, y1<, 8x2, y2<< = 8x, y< /. NSolve@8cirkel3a, cirkel3b<D
```

```
881.34771, -3.23856<, 8-0.0784806, 3.8924<<
```

Nu beräknar vi arean av denna begränsade yta. dy-integral blir lättast. Den begränsas av cirkel3b(stora) till vänster och cirkel3a(lilla) till höger

```
8xvänster1, xvänster2< = x /. Solve@cirkel3b, xD
```

9$4-\sqrt{24+2y-y^2}$, $4+\sqrt{24+2y-y^2}$=

Vi väljer xvänster1 eftersom den är parabeln som går åt vänster (stora cirkeln)

```
8xhöger1, xhöger2< = x /. Solve@cirkel3a, xD
```

9$-1-\sqrt{16-y^2}$, $-1+\sqrt{16-y^2}$=

Vi väljer xhöger2 eftersom den går åt höger (lilla cirkeln) [Man får lov att plotta graferna för att få denna information]

$$\text{area3} = \int_{y2}^{y1} (\text{xvänster1} - \text{xhöger2})\, dy$$

```
20.0709
```

```
Print@"Svar: ", N@area3, 3D, " a.e."D
```

```
Svar: 20.1 a.e.
```

■ Uppgift 4

$\frac{B}{t}$ = befolkningsökningen. Om man integrerar detta uttryck får man ju befolkningen vid en viss tid

```
Clear@"`*"D
b@t_D = 0.82 e^(0.025 t);
B@t_D = à b@tD dt
```

```
32.8 E^(0.025 t)
```

Nu har vi ju en funktion som beskriver befolkningsmängden vid en viss tidpunkt. Om år t = 0 år 1990 är tiden t = 20 år 2010

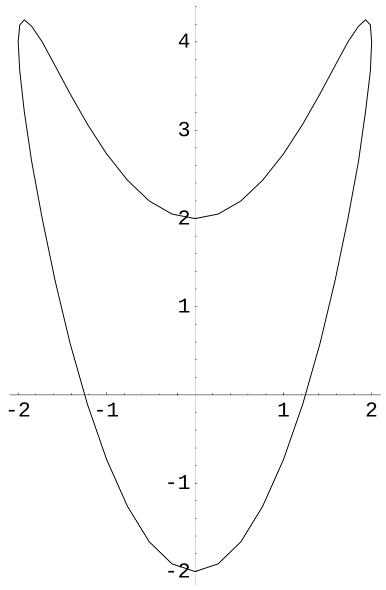
```
befmängd = B@20D;
Print@"Svar: ", N@befmängd, 3D, " miljoner"D
```

```
Svar: 54.1 miljoner
```

■ Uppgift 5

Enligt s 230 i boken är det som följande:
Båglängden, $s \quad \sqrt{x^2 \quad y^2}$, omskrivningar:
dx = $\frac{dx}{dt}$ dt = x'(t)dt samt dy = $\frac{dy}{dt}$ dt = y'(t)dt. Således:
ds = $\sqrt{(x'(t)\,dt)^2 \quad (y'(t)\,dt)^2} = \sqrt{x'(t)^2 \quad y'(t)^2}\sqrt{dt^2} = \sqrt{x'(t)^2 \quad y'(t)^2}$ dt. Eftersom y = y(x) så ersätter vi x med t och får y = y(t), således är x'(t) = 1 och
ds = $\sqrt{1 \quad y'(t)^2}$ dt och s = $\int$ds.

```
Clear@"`*"D
Needs@"Graphics`ImplicitPlot`"D
kurva5 = Hx^2 - yL^2 == 4 - x^2;
ImplicitPlot@kurva5, 8x, -2, 2<D;
```



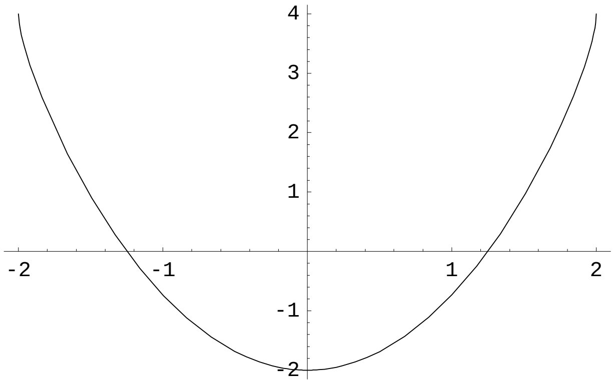
a)

```
Solve@kurva5, yD
```

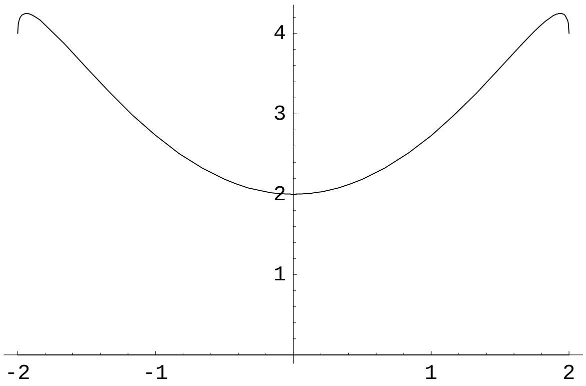
```
99y → x^2 - •!!!!!!!!!! 4 - x^2 =, 9y → x^2 + •!!!!!!!!!! 4 - x^2 ==
```

Vi kan se att kurvan inte är definierad för -2 < x < 2 för då blir rotuttrycket imaginärt

```
f@x_D := x^2 − •!!!!!!!!!!! 4 − x^2 ;
g@x_D := x^2 + •!!!!!!!!!!! 4 − x^2 ;
Plot@f@xD, 8x, −2, 2<D
Plot@8g@xD, 0<, 8x, −2, 2<D
```



- Graphics -



- Graphics -

```
s5a = à_{−2}^{2} j "################ 1 + f'@xD^2 y z { k dx;
s5b = à_{−2}^{2} j "################ 1 + g'@xD^2 y z { k dx;
bågländg5tot = s5a + s5b •• N
```

19.7955

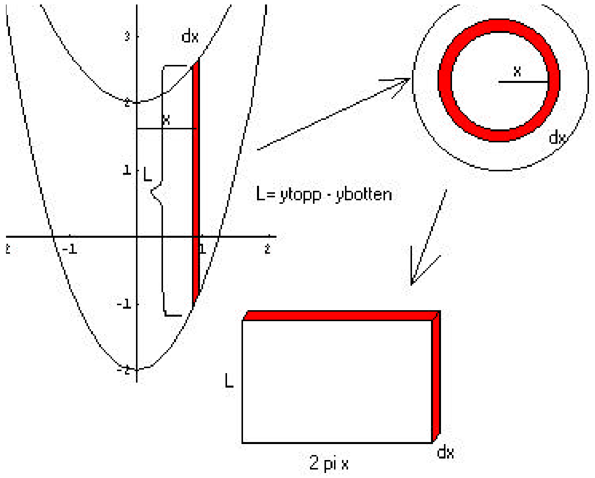
b)

Det blir lättast med en dx-integral. $\int_{x1}^{x2}$(yupptill   ynertill)   *x*. ypptill = g(x) och ynertill = f(x), x1 = -2 och x2 = 2.

```
f@x_D := x^2 − •!!!!!!!!!!! 4 − x^2 ;
g@x_D := x^2 + •!!!!!!!!!!! 4 − x^2 ;
area5 = à_{−2}^{2} Hg@xD − f@xDL dx
```

4 π

c)



Skalmetoden ger att dV = 2 xLdx, där L = ytopp-ybotten

```
f@x_D := x² − •!!!!!!!!!! 4 − x² ;
g@x_D := x² + •!!!!!!!!!! 4 − x² ;
V5 = à_0^2 H2 π * x * Hg@xD − f@xDLL dx
```

$\frac{32\,\pi}{3}$

```
Print@"Svar: aL ", båglängd5tot, " l.e. bL ", area5, " a.e. cL ", V5, " v.e."D
```

Svar: aL 19.7955 l.e. bL 4 π a.e. cL $\frac{32\,\pi}{3}$ v.e.

■ Uppgift 6

a)

1 m/s = 3,6 km/h

```
Clear@"`*"D
a@t_D := k H1 - Ht - 20L ⅇ^(-0.2 t)L
v@t_D = à a@tD ⅆt + C1
ekv6a = v@10D == 1000 • 3.6;
ekv6b = v@0D == 0;
lösn6 = Solve@8ekv6a, ekv6b<, 8k, C1<D;
k1 = k •. lösn6@@1DD
C2 = C1 •. lösn6@@1DD
```

```
C1 + k t + E^(-0.2 t) k H-75. + 5. tL
```

```
3.40345
```

```
255.258
```

```
hast@t_D = v@tD •. 8k -> k1, C1 -> C2<
```

```
255.258 + 3.40345 t + 3.40345 E^(-0.2 t) H-75. + 5. tL
```

```
vmax = Round@hast@20D * 3.6D
```

```
1170
```

b)

Sträckan s = $\int\int a(t)\ \ t = \int \text{hast}(t)\ \ t{+}\text{C}$

```
s@t_D = à hast@tD ⅆt + C3;
ekv6c = s@0D == 0;
C4 = C3 •. Solve@ekv6cD;
höjd@t_D = s@tD •. 8C3 -> C4<;
hö = höjd@20D • 1000;
h = hö@@1DD
```

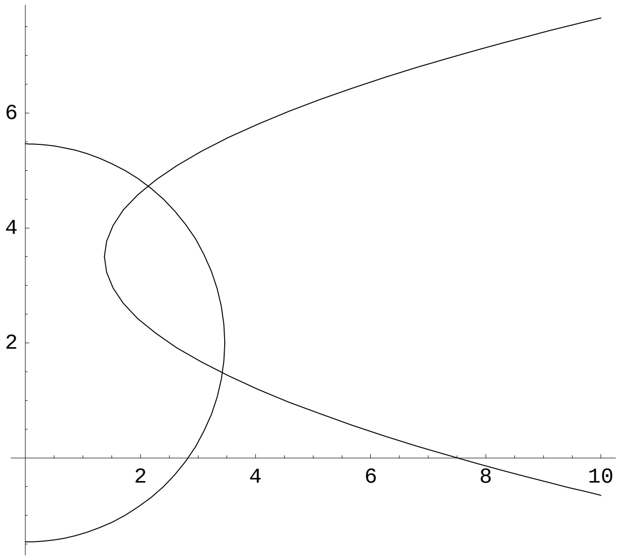
```
4.91941
```

```
Print@"Svar: aL ", vmax, " km•h  bL ", N@h, 2D, " km"D
```

```
Svar: aL 1170 km•h  bL 4.9 km
```

■ Uppgift 7

```
Clear@"`*"D
Needs@"Graphics`ImplicitPlot`"D
kurva7a = y^2 - 7 y + 15 - 2 x == 0;
kurva7b = x^2 + y^2 - 4 y - 8 == 0;
ImplicitPlot@8kurva7a, kurva7b<, 8x, 0, 10<D;
```



Nu beräknar vi skärningspunkterna:

```
lösn7 = NSolve@8kurva7a, kurva7b<, 8x, y<D
```

```
88x → -4.77804 - 1.40168 I, y → 3.89703 - 3.5304 I<,
 8x → -4.77804 + 1.40168 I, y → 3.89703 + 3.5304 I<, 8x → 2.13191, y → 4.73038<,
 8x → 3.42417, y → 1.47556<<
```

```
y1 = y •. lösn7@@3DD;
y2 = y •. lösn7@@4DD;
```

Skalmetoden ger vid rotation runt x-axeln:
dV = 2 yLdy, där L = $x_{\text{vänster}}$ $x_{\text{höger}}$. (V = $\int$2 yL y)

```
xvänster = x •. Solve@kurva7a, xD;
X = x •. Solve@kurva7b, xD
```

```
9- •!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    8 + 4 y - y^2 , •!!!!!!!!!!!!!!!!!!
                     8 + 4 y - y^2 =
```

```
xhöger = X@@2DD;
```

```
L = xvänster - xhöger •• Simplify
```

```
9 1/2 I15 - 7 y + y^2 - 2 •!!!!!!!!!!!!!!!!!!
                           8 + 4 y - y^2 M=
```

Längden L varierar ju mellan y1 och y2

```
Volymen = à_{y1}^{y2} 2 π * y * L d y;
V = Volymen@@1DD
```

78.4614

```
Print@"Svar: Volymen är ", N@V, 4D, " v.e."D
```

Svar: Volymen är 78.46 v.e.

■ Uppgift 8

```
Clear@"`*"D
v@h_D = 12 • 3.6 - k * h;
ekv8a = v@1D == 2 • 3.6;
k1 = k •. Solve@ekv8a, kD
```

82.77778<

```
hast = v@hD •. 8k -> k1< H*m•s*L
```

83.33333 - 2.77778 h<

a)

Tiden beroende av höjden h fås ur dt = $\frac{1}{v}$ ds, då får man ett samband hur tiden fårhåller sig till höjden h. Tiden är ju sträckan delat med hastigheten (som ovan) och sträckan är ju 120 m samt 200 - 120 m

$$t1 = \frac{120}{hast};$$
$$t2 = \frac{80}{hast};$$

Nu vet vi hur tiden beror på höjden. Men höjden varierar ju så sambandet blir från grunt till djupt:

```
ttot1 = à_0^1 Ht1L d h
```

877.404<

```
ttot2 = à_0^1 Ht2L d h
```

851.6027<

```
T = ttot1 + ttot2;
Print@"Svar: ", Round@T@@1DDD, " s"D
```

Svar: 129 s

b)

Om vi säger att floden har sitt största djup på x meter från stranden blir sambandet:

```
ti1 = x/hast;
ti2 = (200 - x)/hast;
titot1 = ∫_0^1 ti1 ⅆh
```

```
80.645033 x<
```

```
titot2 = ∫_0^1 ti2 ⅆh
```

```
8129.007 - 0.645033 x<
```

```
Ttot = titot1 + titot2 •• Chop
```

QEF! Man kan visa att tiden är oberende av var högsta djupet i floden är

```
8129.007<
```

```
Print@"Svar: ", Round@Ttot@@1DDD, " s"D
```

```
Svar: 129 s
```

■ Uppgift 9

Formeln för volymen härleds:
Cirkelns ekvation: x^2 y^2 R^2 => x^2 R^2 y^2 (1)
Smala skivans volym: dV = x^2 y (2)
(1) in i (2) => dV = $(R^2 \quad y^2) \quad y$
Totala volymen om skivan får rotera från R-h R:
V = $\int_{R\ \ h}^{R}(R^2 \quad y^2) \quad y$

```
Clear@"`*"D
V@R_, h_D = π ∫_(R-h)^R HR^2 - y^2L ⅆy •• Simplify
```

```
-(1/3) h^2 π Hh - 3 RL
```

```
PrintA"Svar: (1/3) π h^2H3 R-hL"E
```

```
Svar: (1/3) π h^2H3 R-hL
```