Mathematica lab 4

■ Uppgift 1

a)

Clear@"`*"D

f@x_D := $\dfrac{\mathbf{3\,x^2 - 4\,x + 5}}{\mathbf{x^2 + 3\,x - 10}}$**;**

prim = f'@xD == 0 •• Solve

99x → $\dfrac{5}{13}$=, 8x → 5<=

Max eller min?

f''A$\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$**E •• N**

f''@5D

−0.793031

$\dfrac{1}{15}$

f"<0 => maximum, f">0 => minimum

max = 8x1, y1< = 9$\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$**, fA**$\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$**E=;**

min = 8x2, y2< = 85, f@5D<;

Print@"Svar: aL Lokalt maximum i ", max, " Lokalt minimum i ", minD

Svar: aL Lokalt maximum i 9$\dfrac{5}{13}$, −$\dfrac{22}{49}$= Lokalt minimum i 85, 2<

b)

Clear@"`*"D

ekv1b = $\mathbf{x^2 + 3\,x - 10}$ **== 0;**

lösn1b = Solve@ekv1bD;

8x1, x2< = x •. lösn1b

8−5, 2<

x får inte vara -5 och 2 för då är nämnaren 0.

$$f@x\_D := \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x - 10};$$

```
y1 = Limit@f@xD, x -> ∞D
y2 = Limit@f@xD, x -> -∞D
```

3

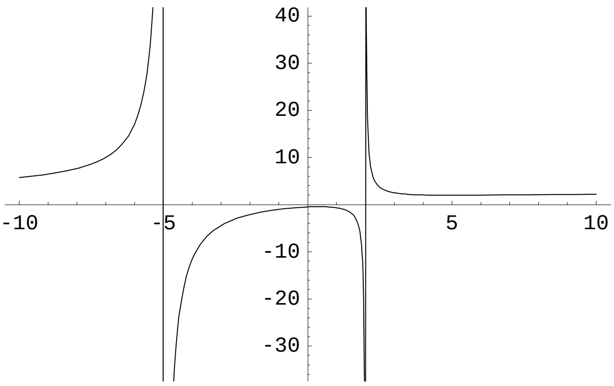
3

```
Print@"Svar: bL Horisontell asymptot: y=", y1, " Vertikala asymptoter: x=",
 x1, " och x=", x2D
```

Svar: bL Horisontell asymptot: y=3 Vertikala asymptoter: x=-5 och x=2

c)

```
Plot@f@xD, 8x, -10, 10<D
```



- Graphics -

■ Uppgift 2

```
Clear@"`*"D
```

$$f@x\_D := \sqrt{4x^2 - 8x + 5};$$

$$k = \text{LimitA}\frac{f@xD}{x}, x \to \infty E$$

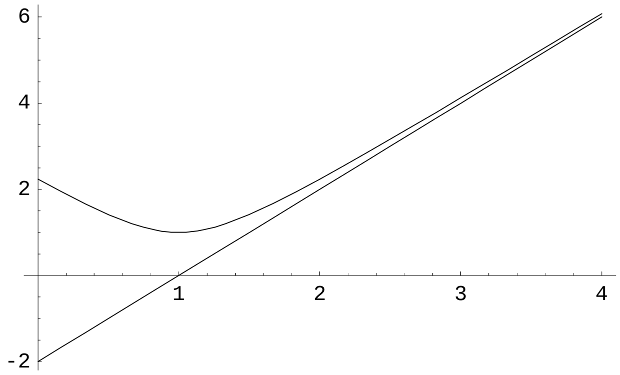
```
m = Limit@Hf@xD - k * xL, x -> ∞D
```

2

-2

```
g@x_D := k * x + m;
Print@"Svar: Asymptotens ekvation är y = ", k, "x", mD
Plot@8f@xD, g@xD<, 8x, 0, 4<D
```

```
Svar: Asymptotens ekvation är y = 2x-2
```




```
- Graphics -
```

■ Uppgift 3

```
Clear@"`*"D
f@x_D := •!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
          -9 - 12 x + 48 x^2 + 4 x^3 - 15 x^4 + ArcSinA 1/3 * H-1 + 2 xLE;
Needs@"Algebra`InequalitySolve`"D
Df = InequalitySolveA-9 - 12 x + 48 x^2 + 4 x^3 - 15 x^4 ≥ 0 && -1 ≤ 1/3 * H-1 + 2 xL ≤ 1, xE
```

```
-1 ≤ x ≤ -1/3 ÈÈ 3/5 ≤ x ≤ •!!!3
```

```
8x1, x2, x3< = x •. NSolve@f'@xD == 0, xD
```

```
8-0.972374, 1.3474, 2.00103<
```

x = -0,972 och x = 1,3474 ligger inom gränsen men inte x = 2 därför tas den bort ur beräkningarna.
Men är detta max eller min? Kontroll:

```
f''@x1D
f''@x2D
```

```
-73.5252
```

```
-20.6939
```

Båda är ett maximum men är detta verkligen högsta värdena? Kontroll:

```
f@-1D •• N
fA -1/3 E •• N
fA 3/5 E •• N
fA •!!! 3 E •• N
f@x1D •• N
f@x2D •• N
```

```
4.08606

-0.589031

0.0667161

0.963804

4.1861

5.3247
```

```
Print@"Svar:"D
Print@"  Df = 8x: ", Df, "<"D
PrintA"  Vf  = 8y: ", fA -1/3 E •• N, " ≤ y ≤ ", f@x2D •• N, "<"E
```

```
Svar:

  Df = 8x: -1 ≤ x ≤ - 1/3 ÈÈ 3/5 ≤ x ≤ •!!! 3 <

  Vf  = 8y: -0.589031 ≤ y ≤ 5.3247<
```

■ Uppgift 4

```
Clear@"`*"D
y = f@x_D := 400/(x + 1);
```

Avståndsformeln d = $\sqrt{(x_1 \quad x_0)^2 \quad (y_1 \quad y_0)^2}$, när d ' = 0 finns min och maxpunkter för den ekvationen

```
d@x_D :=  "################################ Hx - 0L^2 + Hf@xD - 0L^2 ;
8x1, x2, x3, x4< = x •. NSolve@d'@xD == 0, xD
```

```
8-20.7546, -0.750078 - 19.9953 I, -0.750078 + 19.9953 I, 19.2548<
```

De imaginära delarna kan man ju strunta i men vilket är max och min?

```
d''@x1D
d''@x4D
```

```
0.143189

0.139654
```

Båda är ett minimum men vilket ger det kortaste avståndet?

```
d@x1D
d@x4D
```

```
28.9957
```

```
27.5816
```

```
ekv4 = s == v * t;
s = d@x4D; v = 10;
lösn4 = Solve@ekv4, tD;
t1 = t •. lösn4@@1DD
```

```
2.75816
```

Detta är ju i timmar och är lite svårt att veta hur lång tid det är, så vi gör om till minuter.

```
Print@"Svar: Tiden är ", t1 * 60, " min."D
```

```
Svar: Tiden är 165.49 min.
```

■ Uppgift 5

```
Clear@"`*"D
ekv5a = 3 x^3 + 2 y^3 == 10 x * y;
lösn5a = Solve@8ekv5a, x == y<, 8x, y<D
```

```
88x → 0, y → 0<, 8x → 0, y → 0<, 8x → 2, y → 2<<
```

(2, 2) är enda stället i första kvadranten där linjerna skär varandra. Deriverar implicit med avseende på x:

```
derivata = Dt@ekv5a, xD •. Dt@y, xD → y'
```

$9 x^2 + 6 y^2 y' == 10 y + 10 x y'$

k-värdet (lutningen) hittas genom att sätta in värdena i derivatan av funktionen

```
x = 2; y = 2;
k = y' •. Solve@derivata, y'D
```

```
8-4<
```

m-värdet, och hela ekvationen, fås ur enpunktsformeln:

```
Clear@"`*"D
ekv5b = Hy - 2L == -4 * Hx - 2L;
lösn5b = Solve@ekv5b, yD •• Simplify
```

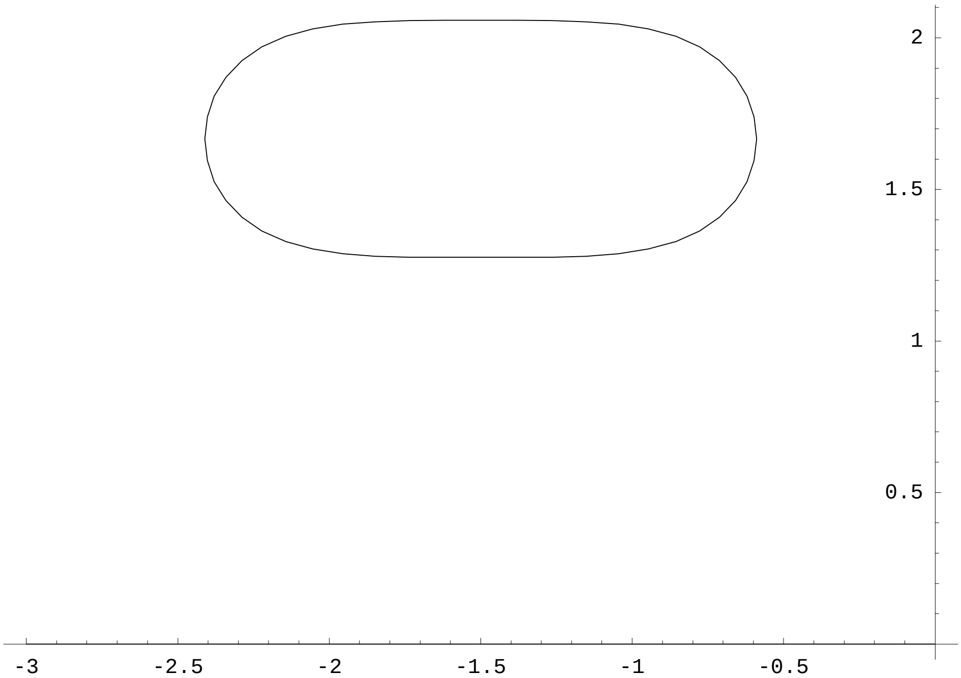
```
88y → 10 - 4 x<<
```

```
Print@"Svar: y = ", y •. lösn5b@@1DDD
```

```
Svar: y = 10 - 4 x
```

■ Uppgift 6

```
Clear@"`*"D
Needs@"Graphics`ImplicitPlot`"D
ImplicitPlot@816 x^4 + 96 x^3 + 216 x^2 + 216 x + 72 y1^2 - 240 y1 + 270 == 0, y == 0<, 8x, -3, 0<D;
```




```
f@y_D := 72 y^2 - 240 y + 270;
y1 = y •. Solve@f'@yD == 0, yD
```

$9\frac{5}{3}=$

Detta är extrempunkten för y (se graf), vad är då x när y = $\frac{5}{3}$

```
ekv6a = 16 x^4 + 96 x^3 + 216 x^2 + 216 x + 72 y1^2 - 240 y1 + 270 == 0;
8x1, x2, x3, x4< = x •. Solve@ekv6a, xD
```

$9\frac{1}{2}\,H-3-11^{1\bullet 4}L,\ \frac{1}{2}\,H-3-I\,11^{1\bullet 4}L,\ \frac{1}{2}\,H-3+I\,11^{1\bullet 4}L,\ \frac{1}{2}\,H-3+11^{1\bullet 4}L=$

Det är bara x1 och x4 som är reella alltså är det de x-värdet vid vändpunkterna på kurvan (se graf). Vad är avståndet mellan de? x4 är ju högre än x1 så avståndet torde vara x4-x1

```
avst6 = x4 - x1;
Print@"Svar: ", avst6 •• Simplify, " l.e."D
```

Svar: $11^{1\bullet 4}$ l.e.

■ Uppgift 7

```
Clear@"`*"D
f@x_D := ArcTanA 110/x E + ArcTanA 70/(200 - x) E;
8x1, x2< = x •. NSolve@f'@xD == 0, xD
```

```
8102.563, 997.437<
```

997 m är ju inte troligt eftersom avståndet inte kan vara mer än 200m men vi kontrollerar i alla fall.

```
f''@x1D
f''@x2D
```

```
0.000109942
```

-5.54721×10^{-8}

Mycket riktigt x1 är ju våran minpunkt. Men hur beskriver vi var den ligger? Jo:

```
avst1 = 200 - x1;
avst2 = x1;
```

Men vad är vinkeln? Jo:

```
αmin = f@x1D • Degree •• N
```

```
82.6978
```

```
Print@"Svar: Avståndet är ", avst1, " från 70 m tornet och ", avst2,
 " från 110 m tornet. Minsta synvinkeln är ", αmin, "°"D
```

```
Svar: Avståndet är 97.4371 från 70 m tornet och 102.563
  från 110 m tornet. Minsta synvinkeln är 82.6978°
```

■ Uppgift 8

Cylindervolymen är $V \quad r^2 h$, Genom phytagoras sats kan vi eliminera r eller h. Figuren ger
$\sqrt{(R \quad r)^2 \quad h^2} \quad \sqrt{r^2 \quad (H \quad h)^2} \quad \sqrt{R^2 \quad H^2}$

```
Clear@"`*"D
ekv8a = Vcylinder == π * r^2 * h;
ekv8b = "######### + "######### == •!!!!!!!!!
        HR - rL^2 + h^2     r^2 + HH - hL^2     HR^2 + H^2L ;
lösn8a = Solve@8ekv8a, ekv8b<, 8Vcylinder<, hD
```

$99V_{cylinder} \to \frac{H\,\pi\, r^2\, H-r+RL}{R}==$

```
Vcyl@r_D = Vcylinder •. lösn8a@@1DD
```

$\frac{H\,\pi\, r^2\, H-r+RL}{R}$

Nu deriverar vi detta uttryck med avseende på r och söker sedan nollställen för att kunna hitta max- och/eller minpunkter

```
der = D@Vcyl@rD, rD
```

$-\frac{H\,\pi\, r^2}{R}+\frac{2\,H\,\pi\, r\, H-r+RL}{R}$

```
8r1, r2< = r •. Solve@der == 0, rD
```

$90, \frac{2\,R}{3}=$

Man inser lätt att om radien r = 0 så får vi minsta volymen (V=0) så det andra torde vara maxpunkt, kontroll:

```
Vcyl''@r1D
Vcyl''@r2D
```

$2\,H\,\pi$

$-2\,H\,\pi$

Mycket riktigt eftersom h inte är negativt så är $\frac{2R}{3}$ våran maxpunkt

```
Vcylmax = Vcyl@r2D
```

$\frac{4}{27}\,H\,\pi\,R^2$

Cylinderns maximala volym utgör ju $\frac{\text{Vcyl(max)}}{\text{Vkon}}$ utav konen

```
Vkon = π * R^2 * H / 3;
del = Vcylmax • Vkon
```

$\frac{4}{9}$

```
Print@"Svar: Volymen är ", Vcylmax, " v.e., vilket utgör ", del, " av konen."D
```

Svar: Volymen är $\frac{4}{27}\,H\,\pi\,R^2$ v.e., vilket utgör $\frac{4}{9}$ av konen.

■ Uppgift 9

Eftersom polynomets kurva har tre extrempunkter så ger det att polynomets derivata är en tredjegradare. Således är polynomet en fjärdegradare:

```
Clear@"`*"D
p@x_D := a * x^4 + b * x^3 + c * x^2 + d * x + e;
p'@xD
```

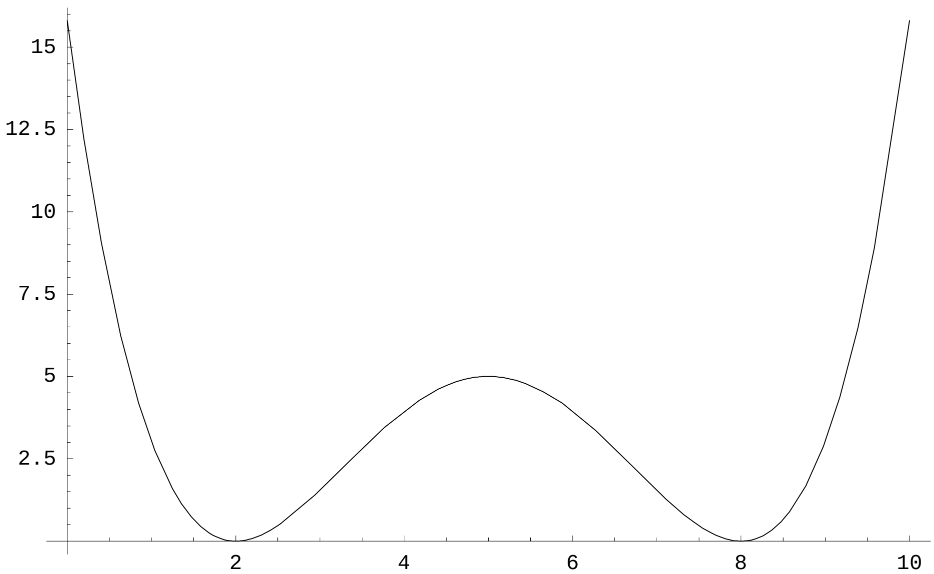
$4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 2\,c\,x + d$

De olika max och minpunkterna ligger ju vid x1 = 2, x2 = 5 och x3 = 8. Om man studerar grafen ser vi att:
p'(2) = 0, p'(5) = 0, p'(8) = 0, p(2) = 0, p(5) = 5 och p(8) = 0.

```
8x1, x2, x3< = 82, 5, 8<;
ekv9a = 4 a * x1^3 + 3 b * x1^2 + 2 c * x1 + d == 0;
ekv9b = 4 a * x2^3 + 3 b * x2^2 + 2 c * x2 + d == 0;
ekv9c = 4 a * x3^3 + 3 b * x3^2 + 2 c * x3 + d == 0;
ekv9d = a * x1^4 + b * x1^3 + c * x1^2 + d * x1 + e == 0;
ekv9e = a * x2^4 + b * x2^3 + c * x2^2 + d * x2 + e == 5;
ekv9f = a * x3^4 + b * x3^3 + c * x3^2 + d * x3 + e == 0;
ekvsyst9 = 8ekv9a, ekv9b, ekv9c, ekv9d, ekv9e, ekv9f<;
lösn9 = Solve@ekvsyst9, 8a, b, c, d, e<D
```

$99a \to \frac{5}{81},\ b \to -\frac{100}{81},\ c \to \frac{220}{27},\ d \to -\frac{1600}{81},\ e \to \frac{1280}{81}==$

```
a1 = a •. lösn9@@1DD;
b1 = b •. lösn9@@1DD;
c1 = c •. lösn9@@1DD;
d1 = d •. lösn9@@1DD;
e1 = e •. lösn9@@1DD;
f@x_D = a1 * x^4 + b1 * x^3 + c1 * x^2 + d1 * x + e1;
Plot@f@xD, 8x, 0, 10<D
```

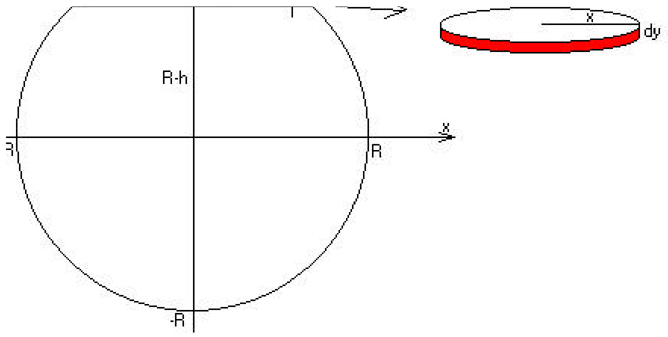


- Graphics -

```
Print@"Svar: pHxL=", f@xDD
```

Svar: pHxL= $\frac{1280}{81} - \frac{1600\,x}{81} + \frac{220\,x^2}{27} - \frac{100\,x^3}{81} + \frac{5\,x^4}{81}$

■ Uppgift 10



Formeln för vattenvolymen härleds:
Cirkelns ekvation: x^2 y^2 R^2 => x^2 R^2 y^2 (1)
Smala skivans volym: dV = x^2 y (2)
(1) in i (2) => dV = $(R^2$ $y^2)$ y
Totala volymen om skivan får rotera från R-h R:
V = $\int_{R\ \ h}^{R}(R^2$ $y^2)$ y

```
Clear@"`*"D
V@R_, h_D = π * à_{R-h}^{R} HR^2 - y^2L dy
```

π J$- \frac{h^3}{3} + h^2$ RN

Vi stoppar in R = 50 i V:

```
V@h_D = V@50, hD
```

J50 $h^2 - \frac{h^3}{3}$N π

Detta är formeln för vattenvolymen.
Vi deriverar volymen implicit med avseende på tiden, t och sätter in $\frac{dV}{dt}$ = 15000 cm^3/min

```
ekv10b = dV/dt == Dt@V@hD, tD •. dV/dt -> 15000
```

15000 == π H100 h Dt@h, tD − h^2 Dt@h, tDL

Om vi nu löser denna ekvation med avseende på Dt[h, t] får vi ju hur höjden ändras med tiden. Vi kallar Dt[h, t] för f(h)

```
8f@h_D< = Dt@h, tD •. Solve@ekv10b, Dt@h, tDD
```

$$\left\{-\frac{15000}{(-100\,h+h^2)\,\pi}\right\}$$

Detta är alltså uttrycket för hur h ändras med t. Om vi nu sätter in h = 30 får vi ju höjdändringen vid den höjden

```
f@30D
```

$$\frac{50}{7\,\pi}$$

```
Print@"Svar: Stighastigheten är", f@30D, "=", f@30D •• N, " cm•min"D
```

Svar: Stighastigheten är $\frac{50}{7\,\pi}$ = 2.27364 cm•min